

Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2021/2022):
(11) Maticové prostory

Ukázka 1 (Řádkový a sloupcový prostor). Určete dimenzi a najděte bázi řádkového a sloupcového prostoru matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Cv. 1. Postupně nad tělesy \mathbb{R} , \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7 rozhodněte, zda pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ platí

- (a) $(1, 2)^T \in \text{Ker}(A)$,
- (b) $(1, 2)^T \in \mathcal{S}(A)$.

Cv. 2. Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\text{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 3. Najděte matici A takovou, že

- (a) $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1, 1)^T$, $(1, 2)^T$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1, 0, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$,
- (b) bázi $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ tvoří vektor $(1, 1, 1)^T$ a báze $\text{Ker}(A)$ je $(1, -2, 1)^T$.

Cv. 4. Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí

- (a) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ implikuje $\text{RREF}(A) = \text{RREF}(B)$,
- (b) $\text{RREF}(A) = \text{RREF}(B)$ implikuje $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$.

Cv. 5. Z vektorů vyberte bázi prostoru $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3, 1, 5, 4)^T, \quad v_2 = (2, 2, 3, 3)^T, \quad v_3 = (1, -1, 2, 1)^T, \quad v_4 = (1, 3, 1, 1)^T.$$

Cv. 6. Rozhodněte, zda platí $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ pro $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
(*Hint: Jaký je vztah mezi $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ a $\mathcal{S}(A + B)$?*)

Cv. 7. Jaký je vztah mezi prostory $\text{Ker}(AB)$ a $\text{Ker}(B)$ pro matice

- (a) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$,
- (b) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$?