

Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2021/2022): (11) Maticové prostory

Ukázka 1 (Řádkový a sloupcový prostor). Určete dimenzi a najděte bázi řádkového a sloupcového prostoru matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Nejprve převedeme matici na (redukovaný) odstupňovaný tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimenzi řádkového a sloupcového prostoru matice můžeme zjistit pomocí hodnoty matice, platí vztah

$$\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = \text{rank}(A) = 2.$$

Bázi řádkového prostoru $\mathcal{R}(A)$ dostaneme přímo z nenulových řádků v odstupňovaném tvaru RREF(A), tedy

$$B_{\mathcal{R}(A)} = \left\{ \left(1, 0, 1, \frac{3}{2}\right)^T, \left(0, 1, 1, -\frac{1}{2}\right)^T \right\}.$$

Bázi sloupcového prostoru vybereme z původních sloupcových vektorů matice A . Volíme sloupce, které odpovídají bázi sloupcům RREF(A), t.j. první a druhý sloupec:

$$B_{\mathcal{S}(A)} = \{(1, 3, 4)^T, (1, 1, -4)^T\}.$$

Cv. 1. Postupně nad tělesy \mathbb{R} , \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7 rozhodněte, zda pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ platí

- (a) $(1, 2)^T \in \text{Ker}(A)$,
- (b) $(1, 2)^T \in \mathcal{S}(A)$.

Řešení:

Z definice jádra a sloupcového prostoru matice platí

$$\begin{aligned} \text{Ker}(A) &= \{x \in \mathbb{T}^n : Ax = o\}, \\ \mathcal{S}(A) &= \text{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\} = \{Ax : x \in \mathbb{T}^n\}, \end{aligned}$$

stačí tedy ověřit, zda vektor $(1, 2)^T$ řeší soustavu $Ax = o$ nad daným tělesem a zda platí $Ax = (1, 2)^T$ pro nějaké $x \in \mathbb{T}^2$.

Nad tělesem \mathbb{R} :

(a) vektor $(1, 2)^T$ nepatří do jádra matice A , protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor $(1, 2)^T$ patří do sloupcového prostoru matice A , protože soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array} \right)$$

má řešení, konkrétně platí $(1, 2)^T = \frac{3}{5}(1, 3)^T + \frac{1}{5}(2, 1)^T$.

Nad tělesem \mathbb{Z}_5 :

(a) vektor $(1, 2)^T$ patří do $\text{Ker}(A)$, protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor $(1, 2)^T$ nepatří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

nemá nad tělesem \mathbb{Z}_5 řešení.

Nad tělesem \mathbb{Z}_7 :

(a) vektor $(1, 2)^T$ nepatří $\text{Ker}(A)$, protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor $(1, 2)^T$ patří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

má nad tělesem \mathbb{Z}_7 řešení a platí $(1, 2)^T = 2(1, 3)^T + 3(2, 1)^T$.

Cv. 2. Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\text{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Převédeme matici A do odstupňovaného tvaru:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Bázi řádkového prostoru $\mathcal{R}(A)$ tvoří (například) nenulové vektory v řádcích výsledné matice, tedy $(1, 2, 0, 1)^T, (0, 0, 1, 1)^T$.

Bázi sloupcového prostoru můžeme vybrat z původních sloupců matice A , které odpovídají bázi sloupcům odstupňovaného tvaru. Bázi sloupců jsou první a třetí, tedy vektory $(1, 2, 3)^T$ a $(2, 1, 1)^T$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$.

Bázi jádra matice A získáme z řešení soustavy $Ax = o$. Množinu všech řešení této soustavy můžeme vyjádřit pomocí nebáziických proměnných x_2, x_4 ve tvaru

$$(-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4) = (-2, 1, 0, 0)^T x_2 + (-1, 0, -1, 1)^T x_4.$$

Bázi $\text{Ker}(A)$ tedy tvoří např. vektory $(-2, 1, 0, 0)^T, (-1, 0, -1, 1)^T$.

Cv. 3. Najděte matici A takovou, že

- (a) $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1, 1)^T, (1, 2)^T$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T$,
- (b) bázi $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ tvoří vektor $(1, 1, 1)^T$ a báze $\text{Ker}(A)$ je $(1, -2, 1)^T$.

Řešení:

- (a) Ze zadaných vektorů v řádkovém a sloupcovém prostoru vidíme, že hledáme matici 3×2 . Požadovanou vlastnost splňují např. matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) V tomto případě hledáme matici 3×3 , pro kterou platí

$$\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \text{rank}(A) = \dim \text{Ker}(A) = 1.$$

Z věty o dimenzi jádra a hodnosti matice ale víme, že pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ musí platit vztah

$$\dim \text{Ker}(A) + \text{rank}(A) = n.$$

Matice splňující požadované vlastnosti tedy neexistuje.

Cv. 4. Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí

- (a) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ implikuje $\text{RREF}(A) = \text{RREF}(B)$,
- (b) $\text{RREF}(A) = \text{RREF}(B)$ implikuje $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$.

Řešení:

(a) Tvrzení neplatí, např. matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mají stejný sloupcový prostor

$$\text{span}\{(1, 0)^T, (0, 0)^T\} = \mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B) = \text{span}\{(0, 0)^T, (1, 0)^T\},$$

ale jejich redukované odstupňované tvary jsou různé (obě matice jsou v RREF).

(b) Neplatí ani opačná implikace, např. pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

máme $\text{RREF}(A) = \text{RREF}(B) = A$, ale zároveň

$$\text{span}\{(1, 0)^T, (0, 0)^T\} = \mathcal{S}(A) \neq \mathcal{S}(B) = \text{span}\{(0, 1)^T, (0, 0)^T\}.$$

Cv. 5. Z vektorů vyberte bázi prostoru $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3, 1, 5, 4)^T, \quad v_2 = (2, 2, 3, 3)^T, \quad v_3 = (1, -1, 2, 1)^T, \quad v_4 = (1, 3, 1, 1)^T.$$

Řešení:

Zapišeme jednotlivé vektory do sloupců matice a převedeme ji do (redukovaného) odstupňovaného tvaru

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že báze sloupců jsou první, druhý a čtvrtý, báze prostoru $\mathcal{S}(A) = V$ tedy tvoří původní vektory $v_1 = (3, 1, 5, 4)^T$, $v_2 = (2, 2, 3, 3)^T$ a $v_4 = (1, 3, 1, 1)^T$.

Ze třetího sloupce upravené matice dostaneme souřadnice vektoru v_3 vzhledem k bázi $B = \{v_1, v_2, v_4\}$, platí

$$v_3 = (1, -1, 2, 1)^T = 1 \cdot (3, 1, 5, 4)^T + (-1) \cdot (2, 2, 3, 3)^T,$$

a tedy $[v_3]_B = (1, -1, 0)$.

Cv. 6. Rozhodněte, zda platí $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ pro $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
(*Hint: Jaký je vztah mezi $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ a $\mathcal{S}(A + B)$?*)

Řešení:

Uvažujme prostor generovaný sjednocením sloupců matice A a sloupců matice B , tedy spojení $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$. Dimenze tohoto prostoru je nanejvýš

$$\dim \mathcal{S}(A) + \dim \mathcal{S}(B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

Dále, prostor $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ obsahuje všechny vektory generované sloupci matice $A + B$, tedy $\mathcal{S}(A + B)$ je podprostorem $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$. Platí proto

$$\text{rank}(A + B) = \dim \mathcal{S}(A + B) \leq \dim \mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

Cv. 7. Jaký je vztah mezi prostory $\text{Ker}(AB)$ a $\text{Ker}(B)$ pro matice

- (a) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$,
- (b) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$?

Řešení:

- (a) Nechť $x \in \text{Ker}(B)$, pak z definice jádra platí $Bx = o$. Vektor x patří také do jádra matice AB , protože

$$(AB)x = A(Bx) = Ao = o,$$

dostaneme tedy inkluzi $\text{Ker}(B) \subseteq \text{Ker}(AB)$. Obrácená inkluze obecně neplatí, např. pro $A = 0_n$ a $B = I_n$ je vektor $y = (1, 0, \dots, 0)^T$ v jádru matice AB , ale nikoliv v jádru matice B .

- (b) Nahlédneme, že pro regulární matici A platí také inkluze $\text{Ker}(AB) \subseteq \text{Ker}(B)$, a tedy $\text{Ker}(AB) = \text{Ker}(B)$. Nechť $x \in \text{Ker}(AB)$, potom $(AB)x = o$. Z regularity matice A existuje inverzní matice A^{-1} , pro kterou platí

$$Bx = (A^{-1}A)Bx = A^{-1}((AB)x) = A^{-1}o = o,$$

z čehož plyne $x \in \text{Ker}(B)$.