

**Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2021/2022):**  
**(10) Báze a dimenze**

**Cv. 1.** Zjistěte zda jsou vektory z  $\mathbb{R}^3$  lineárně nezávislé:

(a)  $(2, 3, -5)^T, (1, -1, 1)^T, (3, 2, -2)^T$ .

(b)  $(2, 0, 3)^T, (1, -1, 1)^T, (0, 2, 1)^T$ .

**Cv. 2.** Nechť  $V$  je vektorový prostor nad tělesem  $K$  a  $X \subseteq Y \subseteq V$ . Rozhodněte a **zdůvodněte**, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li  $X$  nezávislá, je  $Y$  závislá.

(b) Je-li  $X$  nezávislá, je  $Y$  nezávislá.

(c) Je-li  $X$  závislá, je  $Y$  závislá.

(d) Je-li  $Y$  nezávislá, je  $X$  nezávislá.

(e) Je-li  $Y$  závislá, je  $X$  závislá.

**Cv. 3.** Ve vektorovém prostoru  $\mathbb{Z}_5^3$  vyjádřete vektor  $(3, 2, 4)^T$  jako lineární kombinaci vektorů  $(3, 3, 2)^T, (1, 1, 4)^T$  a  $(0, 2, 1)^T$ . Je toto vyjádření jednoznačné?

**Cv. 4.** Doplňte množinu  $M$  na bázi vektorového prostoru  $V$ .

(a)  $M = \{(1, 2, 0, 0)^T, (2, 1, 1, 3)^T, (0, 1, 0, 1)^T\}$  pro  $V = \mathbb{R}^4$ .

(b)  $M = \{-x^2, x + x^2, x^3 - 1\}$  pro prostor  $V$  reálných polynomů stupně nejvýše tři.

**Cv. 5.** Souřadnice vektoru  $u$  vůči uspořádané bázi  $X = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  jsou  $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ . Určete souřadnice téhož vektoru  $u$  vůči bázi  $Y = (v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2)$ .

**Cv. 6.** Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru  $\mathbb{Z}_5^7$ .

(a)

$$U = \text{span}\{(4, 1, 0, 3, 4, 0, 0)^T, (4, 3, 1, 0, 2, 3, 1)^T, (4, 1, 4, 0, 3, 2, 4)^T, \\ (2, 4, 1, 4, 4, 3, 1)^T, (0, 4, 3, 2, 2, 4, 3)^T\}.$$

(b)

$$V = \{(x_1, \dots, x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\}.$$

**Cv. 7.** Rozhodněte, zda pro prostory  $U$  a  $V$  z minulého příkladu platí inkluze (tj.  $U \subseteq V$  nebo  $V \subseteq U$ ). Pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.