Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2021/2022): (10) Báze a dimenze

Cv. 1. Zjistěte zda jsou vektory z $\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

(a) $(2,3,-5)^T, (1,-1,1)^T, (3,2,-2)^T$.

(b) $(2,0,3)^T, (1,-1,1)^T, (0,2,1)^T$.

Řešení:

(a) Hledáme koeficienty $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Problém ověření lineární nezávislosti tedy lze převést na hledání řešení homogenní soustavy

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Všimněte si, že jednotlivé vektory jsou ve sloupcích matice. Vyřešením soustavy zjistíme, že má řešení pouze $a = b = c = 0$. Vektory jsou tedy lineárně nezávislé.

(b) Obdobně jako v (a) vytvoříme homogenní soustavu

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Pomocí Gaussovy eliminace dostaneme

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Soustava má tedy i nějaké netriviální řešení a vektory jsou tedy lineárně závislé. Pro úplnost doplníme, že řešení soustavy je $a = -t, b = 2t, c = t$ pro parametr $t \in \mathbb{R}$. Tedy například s koeficienty $-1, 2$ a 1 dostaneme

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 2. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K a $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte a **zdůvodněte**, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li X nezávislá, je Y závislá.

(b) Je-li X nezávislá, je Y nezávislá.

(c) Je-li X závislá, je Y závislá.

(d) Je-li Y nezávislá, je X nezávislá.

(e) Je-li Y závislá, je X závislá.

<u>Řešení:</u>
Obecně dle definice se nezávislost přenáší "dolů" a závislost "nahoru". Konkrétně:

(a) Neplatí: $X = \{(1,0)^T\}$ a $Y = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ jsou obě nezávislé v $\mathbb{R}^2$.

(b) Neplatí: $X = \{(1,0)^T\}$ je nezávislá, ale $Y = \{(1,0)^T, (2,0)^T\}$ je už závislá v $\mathbb{R}^2$.

(c) Platí. Mějme $X = \{v_1, \ldots, v_\ell\}$ a $Y = \{v_1, \ldots, v_\ell, w_1 \ldots, w_k\}$. Dle předpokladu je X závislá, tedy existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in K$ takové, že $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)^T \neq (0, \ldots, 0)^T$ a

$$\sum_{i \in [\ell]} \alpha_i x_i = o.$$

Vezměme $\beta_{\ell+1}, \ldots, \beta_k = (0, \ldots, 0)$. Pak stále platí, že $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell, \beta_1, \ldots, \beta_k) \neq (0, \ldots, 0)^T$ a

$$\sum_{i \in [\ell]} \alpha_i v_i + \sum_{j \in [k]} \beta_j w_j = o$$

je netriviální lineární kombinace vektorů z Y, která se rovná nulovému vektoru o. Množina Y je tedy také lineární závislá.

(d) Platí. Jde o obměnu bodu (c).

(e) Neplatí: $Y = \{(1,0)^T, (2,0)^T\}$ je závislá, ale $X = \{(1,0)^T\}$ je nezávislá v $\mathbb{R}^2$.

Cv. 3. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ vyjádřete vektor $(3,2,4)^T$ jako lineární kombinaci vektorů $(3,3,2)^T$, $(1,1,4)^T$ a $(0,2,1)^T$. Je toto vyjádření jednoznačné?

<u>Řešení:</u>
Vyřešíme soustavu rovnic, která vznikne tak, že vektory $(3,3,2)^T$, $(1,1,4)^T$ a $(0,2,1)^T$ dáme do sloupců matice a vektor $(3,2,4)^T$ použijeme jako vektor pravé strany.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Dostaneme $x_3 = 2$, $x_2 \in \mathbb{Z}_5$ a $x_1 = 1 + 3x_2$ tedy:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (1 + 3x_2) \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Řešení tedy není jednoznačné a vektory $(3,3,2)^T, (1,1,4)^T$ a $(0,2,1)^T$ netvoří bázi $\mathbb{Z}_5^3$ (můžeme si také všimnout, že vektory nejsou lineárně nezávislé, protože $(3,3,2)^T = 3(1,1,4)^T$ nad $\mathbb{Z}_5$).

Cv. 4. Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V.

(a) $M = \{(1,2,0,0)^T, (2,1,1,3)^T, (0,1,0,1)^T\}$ pro $V = \mathbb{R}^4$.

(b) $M = \{-x^2, x+x^2, x^3-1\}$ pro prostor V reálných polynomů stupně nejvýše tři.

<u>Řešení:</u>

(a) Prostor $\mathbb{R}^4$ má dimenzi 4, proto je třeba rozšířit M o jeden vektor. Z věty o výměně platí, že alespoň jeden z vektorů kanonické báze je nezávislý na vektorech z M. Nezávislost zjistíme současným vyřešením rovnic $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = e_i$, kde u_1, u_2, u_3 jsou vektory z M a e_i jsou vektory kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^4$.

Dostáváme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 6 & -1 \end{array}\right).$$

Protože poslední řádek obsahuje pivot ve všech sloupcích na pravé straně, vidíme, že doplněním o libovolný vektor e_i se stane množina M bází prostoru $\mathbb{R}^4$.

(b) Budeme postupovat obdobně pomocí souřadnic vzhledem ke kanonické bázi daného prostoru. Zkusíme doplnit M o některý vektor z kanonické báze $1, x, x^2, x^3$. Máme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Zde vidíme, že buď $M \cup \{1\}$ nebo $M \cup \{x^3\}$ (a i mnoho jiných možností, které jsme však netestovali) tvoří bázi V, nikoli však $M \cup \{x\}$ nebo $M \cup \{x^2\}$.

Cv. 5. Souřadnice vektoru u vůči uspořádané bázi $X = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ jsou $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice téhož vektoru u vůči bázi $Y = (v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2)$.

<u>Řešení:</u>

Hledáme taková $(b_1, \ldots, b_4)^T = [u]_Y$, aby platilo

$$b_1(v_1 + v_4) + b_2(v_2 + v_3) + b_3v_4 + b_4v_2 = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4.$$

Protože je X báze, jsou koeficienty u v_i jednoznačné. Dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_2 + b_4 &= a_2 \\ b_2 &= a_3 \\ b_1 + b_3 &= a_4 \end{aligned}$$

Nové souřadnice jsou $[u]_Y = (a_1, a_3, a_4 - a_1, a_2 - a_3)^T$.

Cv. 6. Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru $\mathbb{Z}_5^7$.

(a)

$$\begin{aligned} U = \operatorname{span}\big\{&(4,1,0,3,4,0,0)^T, (4,3,1,0,2,3,1)^T, (4,1,4,0,3,2,4)^T, \\ &(2,4,1,4,4,3,1)^T, (0,4,3,2,2,4,3)^T\big\}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} V = \big\{(x_1,\dots,x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 :\, & x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0, \\ & 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0, \\ & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\big\}. \end{aligned}$$

Řešení:

(a) Z generátorů sestavíme matici (vektory změníme na řádkové) a tuto matici převedeme na odstupňovaný tvar. Elementární úpravy nemění řádkový prostor, výsledné nenulové řádky tvoří tedy hledanou bázi.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimenze U je tedy 3 a báze U je např. $(1,2,3,2,2,4,3)^T, (0,1,1,0,2,3,1)^T, (0,0,1,3,1,3,1)^T$.

(b) Z rovnic sestavíme soustavu a budeme hledat bázi jejího řešení. Např. pro V máme

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že dimenze prostoru řešení je rovna počtu volných proměnných. Řešení soustavy jsou tvaru $x = p_1(2,1,0,0,0,0,0)^T + p_2(1,0,2,1,0,0,0)^T + p_3(1,0,1,0,1,0,0)^T + p_4(1,0,4,0,0,3,1)^T$ pro $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{Z}_5$ a bázi prostoru řešení tvoří vektory, jejichž lineární kombinací pomocí parametrů p_1, p_2, p_3, p_4 můžeme nagenerovat všechna řešení.
Dimenze V je tedy 4 a báze V je např. $(2,1,0,0,0,0,0)^T, (1,0,2,1,0,0,0)^T, (1,0,1,0,1,0,0)^T, (1,0,4,0,0,3,1)^T$.

Cv. 7. Rozhodněte, zda pro prostory U a V z minulého příkladu platí inkluze (tj. $U \Subset V$ nebo $V \Subset U$). Pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.

Řešení:

Připomeňme, že dimenze podprostoru je menší nebo rovna dimenzi prostoru. Dimenze podprostorů U a V jsme již určili dříve v předchozím příkladu, můžeme tedy okamžitě vyloučit případ $V \Subset U$. Zbývá ověřit, zda jsou prostory v opačné inkluzi, nebo jsou-li inkluzí neporovnatelné. Stačí ověřit, zda $\dim(\mathrm{span}(U \cup V)) = \dim(V) = 4$.

Popřípadě se také můžeme pokusit vyjádřit vektory báze menšího prostoru jako lineární kombinace větší báze (což je vlastně totéž).

$$\begin{array}{cccc|ccccccc|}
 & & & & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 1 \\
\hline
2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\
0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Zde řádky první matice udávají souřadnice vektorů báze U vůči bázi V (obě tyto báze jsme si zvolili výše). Všimněte si, že se souřadnice dají snadno určit z 2., 4., 5. a 7. složky vektoru a uvědomte si proč.

Pro rozšíření báze vyjdeme z libovolné báze menšího prostoru a přidáváme vektory z většího, dokud nedostaneme požadovanou dimenzi.

Platí tedy inkluze $U \Subset V$. Tato inkluze se dá nahlédnout i snáze, protože všechny vektory báze U splňují rovnice z definice V.