

Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2021/2022):
(7) Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Cv. 1. Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{Z}_7$ tvoří množina

$$S_a = \{(x, y, z)^T : x + 2y - 3z = a\}$$

vektorový podprostor \mathbb{Z}_7^3 .

Kolik má tento vektorový podprostor prvků?

Cv. 2. Nad \mathbb{Z}_{11} určete průnik řešení soustavy rovnic $Ax = 0$ a lineárního obalu množiny vektorů $\{v_1, v_2, v_3\}$, přičemž

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 3. Tvoří všechny polynomy proměnné X s koeficienty nad \mathbb{Z}_3 stupně nejvýše 10 vektorový prostor? Kolik má tento prostor prvků?

Cv. 4. Nad \mathbb{Z}_7 určete, kolik prvků má podprostor

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \cap \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Cv. 5. Uvažme vektorový prostor všech funkcí z \mathbb{N} do \mathbb{Z}_2 . Pro $i \in \mathbb{N}$, buď $a_i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ funkce, která i zobrazí na 1 a vše ostatní na 0. Buď $b: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ funkce, která vše zobrazí na jedničku. Leží b v lineárním obalu $\text{span}\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$?

Cv. 6. Je-li \mathbb{T} komutativní těleso, pak každý podprostor \mathbb{T}^n lze popsat dvěma různými způsoby: Buď jako řešení systému rovnic, nebo jako lineární obal nějakých vektorů.

(a) Nad \mathbb{Q} popište řešení homogenní soustavy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ jako lineární obal vektorů.

(b) Najděte soustavu rovnic, jejímž řešením bude lineární obal vektorů $(1, 2, -1, 0)^T$ a $(1, 0, 0, 1)^T$.