# Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2021/2022): (7) Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

**Cv. 1.** Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{Z}_7$ tvoří množina

$$S_a = \{(x, y, z)^T : x + 2y - 3z = a\}$$

vektorový podprostor $\mathbb{Z}_7^3$.

Kolik má tento vektorový podprostor prvků?

***Řešení:***
Pokud $S_a$ má být vektorový podprostor $\mathbb{Z}_7^3$, tak musí obsahovat nulový vektor $(0, 0, 0)^T$. Vidíme tedy, že musí platit $a = 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$. Dále tedy předpokládejme, že $a = 0$. Dokažme nyní, že v takovém případě o vektorový podprostor jde. K tomu stačí ověřit uzavřenost na násobky prvky ze $\mathbb{Z}_7$ a na sčítání vektorů.

**Uzavřenost na násobky:** Je-li $(x, y, z) \in S_0$ a $\alpha \in \mathbb{Z}_7$, tak $\alpha x + 2\alpha y - 3\alpha z = \alpha(x + 2y - 3z) = \alpha \cdot 0 = 0$, a tedy i $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in S_0$.

**Uzavřenost na sčítání:** Pro $(x, y, z) \in S_0$ a $(x', y', z') \in S_0$, díky distributivitě, komutativitě a asociativitě sčítání v $\mathbb{Z}_7$ platí $(x + x') + 2(y + y') - 3(z + z') = (x + 2y - 3z) + (x' + 2y' - 3z) = 0 + 0 = 0$, a tedy i $(x + x', y + y', z + z') \in S_0$.

Nyní spočteme počet prvků $S_0$. Pro libovolnou volbu $x$ a $y$ dostáváme právě jeden prvek $z$ (totiž $\frac{x+2y}{3} = 5x + 3y$), který splňuje $x + 2y - 3z = 0$. Jelikož máme 7 možností pro $x$ a 7 možností pro $y$, podprostor $S_0$ má celkem $7 \cdot 7 = 49$ prvků.

Závěr: O vektorový prostor se jedná pouze pro $a = 0$, v kterémžto případě má tento prostor 49 prvků.

**Cv. 2.** Nad $\mathbb{Z}_{11}$ určete průnik řešení soustavy rovnic $Ax = 0$ a lineárního obalu množiny vektorů $\{v_1, v_2, v_3\}$, přičemž

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

***Řešení:***
Nejprve vyřešíme danou soustavu rovnic.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Množina všech řešení tedy vychází $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{Z}_{11} \right\}.$

Musíme zjistit, které z těchto vektorů se dají vyjádřit jako $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$, kde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}_{11}$. Označíme-li $w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, máme vlastně vyřešit $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = rw_1 + sw_2$, neboli $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + r(-w_1) + s(-w_2) = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

z čehož vidíme, že $r = 0$ a $s = 0$, neboli jediným vektorem v průniku je $0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2$, čili nulový vektor.

**Cv. 3.** Tvoří všechny polynomy proměnné $X$ s koeficienty nad $\mathbb{Z}_3$ stupně nejvýše 10 vektorový prostor? Kolik má tento prostor prvků?

***Řešení:***
Ano, plyne přímočarým ověřením charakterizace vektorového prostoru jako množiny obsahující nulový vektor a uzavřené na násobky skalárem a součet vektorů. Mohutnost tohoto vektorového prostoru je $3^{11}$.

**Cv. 4.** Nad $\mathbb{Z}_7$ určete, kolik prvků má podprostor

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \bigcap \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

***Řešení:***
Označme dané vektory $v_1, v_2, v_3$ a $w_1, w_2, w_3$. Nyní stačí vyřešit rovnici $xv_1 + yv_2 + zv_3 = rw_1 + sw_2 + tw_3$, podívat se, jaké možné kombinace hodnot $r, s, t$ vyšly a těmi přenásobit $w_1, w_2, w_3$. (Pokud by dané vektory byly lineárně závislé, mohlo by se stát, že více řešení dá ten samý vektor.) Odpověď: 49.

**Cv. 5.** Uvažme vektorový prostor všech funkcí z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Z}_2$. Pro $i \in \mathbb{N}$, buď $a_i \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2$ funkce, která $i$ zobrazí na 1 a vše ostatní na 0. Buď $b \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2$ funkce, která vše zobrazí na jedničku. Leží $b$ v lineárním obalu $\operatorname{span}\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$?

***Řešení:***
Neleží, v lineárním obalu leží jen lineární kombinace konečného počtu vektorů, a to $b$ není.

**Cv. 6.** Je-li $\mathbb{T}$ komutativní těleso, pak každý podprostor $\mathbb{T}^n$ lze popsat dvěma různými způsoby: Buď jako řešení systému rovnic, nebo jako lineární obal nějakých vektorů.

(a) Nad $\mathbb{Q}$ popište řešení homogenní soustavy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ jako lineární obal vektorů.

(b) Najděte soustavu rovnic, jejímž řešením bude lineární obal vektorů $(1, 2, -1, 0)^T$ a $(1, 0, 0, 1)^T$.

***<u>Řešení</u>:***

(a) Jde vlastně o to, vyřešit danou soustavu rovnic. Řešení lze zapsat např. ve tvaru

$$\{r \cdot (3, 1, -5, 0)^T + s \cdot (1, 0, -5, 1)^T \mid r, s \in \mathbb{Q}\} \ .$$

Tedy výsledkem je $\mathrm{span}\{(3, 1, -5, 0)^T, (1, 0, -5, 1)^T\}$.

(b) Pomocí úvah ze cvičení na analytickou geometrii nalezneme rovnice dvou různých nadrovin, jejichž průnikem je rovina obsahující zadané vektory. Dostaneme například homogenní soustavu s maticí $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.