

**Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2021/2022):**  
**(5-6) Grupy a tělesa**

**Cv. 1.** Zjistěte, zda je grupou:

- (a)  $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ,
- (b)  $(\mathbb{Q}, -)$ ,
- (c)  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$ , kde  $a \circ b = |ab|$  pro všechna  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,
- (d)  $(\mathbb{Q}, \circ)$ , kde  $a \circ b = \frac{a+b}{2}$  pro všechna  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,
- (e)  $(\mathbb{Q}, \circ)$ , kde  $a \circ b = a + b + 3$  pro všechna  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,
- (f)  $(\mathcal{F}, +)$ , tj. množina  $\mathcal{F}$  všech reálných funkcí jedné proměnné s operací sčítání funkcí,
- (g) množina rotací v  $\mathbb{R}^2$  kolem počátku s operací skládání zobrazení,
- (h) množina posunutí v  $\mathbb{R}^2$  s operací skládání zobrazení.

**Cv. 2.** Vyplňte tabulku pro binární operaci  $\circ$  na  $\mathbb{G}$  tak aby  $(\mathbb{G}, \circ)$  byla grupou s neutrálním prvkem 0. Zdůvodněte.

(a) 

$\circ$	0	1
0		
1		

(b) 

$\circ$	0	1	2
0			
1			
2			

(c) 

$\circ$	0
0	

(d) 

$\circ$	0	1	2	3
0				
1		0		
2				
3				

**Cv. 3.** Necht'  $(\mathbb{G}, \circ)$  je grupa a  $x \in \mathbb{G}$ . Rozhodněte, zda  $(\mathbb{G}, *)$  je grupou s operací definovanou  $a * b = a \circ x \circ b$  pro všechna  $a, b \in \mathbb{G}$ .

**Cv. 4.** Rozhodněte a zdůvodněte, zda je Abelovou (komutativní) grupou:

- (a) množina  $\{(\begin{smallmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) \mid z \in \mathbb{Z}\}$  s maticovým součinem,
- (b) množina  $\{(\begin{smallmatrix} a & a \\ a & a \end{smallmatrix}) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$  s maticovým součinem.

**Cv. 5.** Vyjádřete jako prvky daného tělesa výrazy:

- (a)  $((2^{-1} + 1)4)^{-1}, 4/3 \in \mathbb{Z}_5$ ,
- (b)  $6 + 7, -7, 6 \cdot 7, 7^{-1}, 6/7 \in \mathbb{Z}_{11}$ .

**Cv. 6.** Nad  $\mathbb{Z}_5$  najděte množinu všech řešení soustavy rovnic

$$3x + 2y + z = 1$$

$$4x + y + 3z = 3$$

a spočítejte její mohutnost.

**Cv. 7.** Nalezněte multiplikativní inverzy  $9^{-1}$  a  $12^{-1}$  v  $\mathbb{Z}_{31}$ .

**Cv. 8.** V  $\mathbb{Z}_7$  spočítejte mocninu matice  $A^{100}$  pro matici  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ .