

**Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2021/2022):**  
**(3) Operace s maticemi**

**Ukázka 1:** Spočítejte následující výrazy:

- (a)  $2A$
- (b)  $A + B$
- (c)  $A - B$
- (d)  $C^T$
- (e)  $Cv$
- (f)  $AB$
- (g)  $BC$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**Ukázka 2:** Dokažte nebo vyvráťte:

- (a) Pro libovolnou matici  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ :  $A + A = 2A$ .
- (b) Pro libovolnou čtvercovou matici  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ :  $A = A^T$ .

**Cv. 1.** Spočítejte  $(-1)A + 2BC$ , kde  $A, B, C$  jsou následující matice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Cv. 2.** Vyřešte soustavy rovnic  $(A | b)$  a  $(B | c)$  zadané

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ a } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Pro vaše řešení  $x$  (respektive  $y$ ) proveďte zkoušku výpočtem součinu  $Ax$  a ověřením rovnosti vektorů  $Ax = b$  (respektive součinu  $By$  a ověřením rovnosti  $By = c$ ).

**Cv. 3.** Vyjádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic. Tedy pro každou elementární řádkovou úpravu najděte matici  $E \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , že  $EA$  je matice, kterou dostaneme aplikováním dané řádkové úpravy na libovolnou matici  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

**Cv. 4.** Dokažte, anebo vyvraťte, zda pro matice  $A, B, C$  a  $\mathbf{0}$  stejného řádu a reálná čísla  $\alpha, \beta$  platí:

- (a)  $A + (B + C) = (A + B) + C$
- (b)  $A + B = B + A$
- (c)  $A + \mathbf{0} = A$
- (d)  $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- (e)  $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$
- (f)  $A + (-1)A = \mathbf{0}$
- (g)  $1A = A$
- (h)  $A(B + C) = AB + AC$
- (i)  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- (j)  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- (k)  $\alpha A + \beta B = (\alpha + \beta)(A + B)$
- (l)  $(A^T)^T = A$
- (m)  $A^T A$  je symetrická
- (n)  $(A + B)^T = A^T + B^T$
- (o)  $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$
- (p)  $AI_n = A$

**Cv. 5.** Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovou matici  $A$  zkonstruujte symetrickou matici  $B$  tak, že jejich součin nekomutuje, t.j.  $AB \neq BA$ . Komutuje součin matic pokud jsou obě matice symetrické?

**Cv. 6.** Dokažte nebo vyvraťte:

- (a) Nechť  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Pokud  $A$  je symetrická a komutuje s  $B$ , pak  $A$  komutuje s  $B^T$ .
- (b) Nechť  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Pokud  $A$  komutuje s  $B$ , pak  $A$  komutuje s  $B^T$ .