Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2021/2022): (3) Operace s maticemi

Ukázka 1: Spočtěte následující výrazy:

(a) $2A$

(b) $A+B$

(c) $A-B$

(d) C^T

(e) Cv

(f) AB

(g) BC

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

(a) Pokud matice A je řádu $n \times m$ výsledná matice bude také řádu $n \times m$. Výslednou matici získáme tak, že každou složku matice A násobíme příslušnou konstantou (tj. hodnotou 2). Dostáváme:

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Abychom mohli sečíst matice A, B musí mít shodné rozměry (všimněme si, že obě jsou shodného řádu 2×2). Výsledná matice bude mít stejné rozměry jako matice A (resp. B), tedy 2×2. Výsledek získáme sčítáním po složkách, tj. každá pozice výsledné matice je součtem hodnot z matice A a B na dané pozici. Dostáváme:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+(-1) \\ 2+0 & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Obdobně jako v předchozím případě, musí A, B být shodného řádu a výsledná matice bude také daného řádu. Výsledek získáme rozdílem po složkách, tj. každá pozice výsledné matice je rozdílem hodnot z matice A a B na dané pozici. Tedy dostáváme:

$$A-B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-1) & 2-(-1) \\ 2-0 & -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Poznamenejme, že na rozdíl matic můžeme také pohlížet jako na součet matice A s maticí $(-1)B$.

(d) Je-li původní matice rozměrů $n \times m$, transponovaná matice bude mít rozměry $m \times n$. Její prvek na pozici i, j je pak roven prvku, který je v původní matici na pozici j, i. Proto získáváme:

$$C^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) Je-li matice C řádu $m \times n$ musí v být n-složkový vektor a výsledkem bude m složkový vektor. V tomto případě je matice C řádu 2×3 a vektor v má 3 složky (řády tedy souhlasí) a výsledkem bude 2-složkový vektor.

Výsledný vektor spočteme následovně:

$$Cv = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Na násobení jsme mohli také pohlížet jako na násobení matice C řádu 2×3 s maticí odpovídající vektoru v řádu 3×1.

(f) Je-li matice A řádu $m \times n$ musí být matice B řádu $n \times o$ a výsledná matice bude řádu $m \times o$. V tomto případě obě matice A, B jsou řádu 2×2 (tedy řády souhlasí) a výsledná matice bude také řádu 2×2.

Výslednou matici spočteme následovně:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(g) Je-li matice B řádu $m \times n$ musí být matice C řádu $n \times o$ a výsledná matice bude řádu $m \times o$. V tomto případě je matice B řádu 2×2 a matice C řádu 2×3 (tedy řády souhlasí) a výsledná matice bude řádu 2×3.

Výslednou matici spočteme následovně:

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 2 & (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) & (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ukázka 2: Dokažte nebo vyvraťte:

(a) Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $A + A = 2A$.

(b) Pro libovolnou čtvercovou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$: $A = A^T$.

Řešení:

(a) Nejprve ověříme, že obě strany mají smysl.

Pro levou stranu potřebujeme ověřit, že sčítání dává smysl. Tedy potřebujeme, aby obě matice v součtu byly stejného řádu. To je pravda ať zvolíme A libovolně, tedy levá strana má smysl vždy.

Na pravé straně násobíme matici A konstantou 2. Tuto operaci můžeme provést s libovolnou maticí A, tedy pravá strana má také vždy smysl.

Pozor na opomíjení tohoto kroku. Může se stát, že tvrzení platí ale pouze pokud obě strany dávají smysl. Uvažte například následující tvrzení: Pro libovolné matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $B \in \mathbb{R}^{o\times p}$: $A + B - B = A$

Poté zkontrolujeme rozměry matice na levé a pravé straně. Na levé straně sčítáme 2 matice řádu $m \times n$ a výsledkem je, dle definice sčítání matic, matice řádu $m \times n$. Na pravé straně násobíme matici řádu $m \times n$ konstantou a výsledkem je, dle Definice 3.3 (Násobek) , matice řádu $m \times n$. Obě strany mají tedy shodné rozměry. *Všimněte si, že při dokazování se odkazujeme na definice z přednášky. Podobně bychom se mohli odkazovat i na věty, lemmata, atp.*

Pozor, pokud tento krok opomenete, může se stát, že matice na levé straně má n řádků a m sloupců, kdežto na pravé straně je jich více. Po složkách můžete ukázat, že levou horní podmatici velikosti $n \times m$ mají obě strany shodnou, ale to nedokazuje rovnost obou stran (která neplatí)!

Nakonec můžeme ukázat rovnost po složkách. Pro libovolný řádek i a sloupec j uvážíme prvek na pozici i, j levé strany a ukážeme, že je roven prvku na pozici i, j pravé strany:

$$\begin{aligned}
[A + A]_{i,j} &= A_{i,j} + A_{i,j} && \text{(rozepíšeme dle definice sčítání)}\\
&= 2A_{i,j} && \text{(nyní pracujeme s čísly z } \mathbb{R}\text{, tedy můžeme sečíst)}\\
&= [2A]_{i,j} && \text{(použijeme definici násobení matice konstantou)}
\end{aligned}$$

(b) To, že tvrzení neplatí ukážeme protipříkladem. Tedy zvolíme matici A, která splňuje předpoklady tvrzení ale neplatí pro ni závěr.

V tomto případě můžeme za A zvolit napříkald následující matici: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jediný předpoklad tvrzení je, že A je čtvercová a ten je pro náš příklad zjevně splněn. Zároveň $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$.

Pokud splnění některého z předpokladů (resp. nesplnění závěru) není triviální, mělo by být součástí řešení zdůvodnění proč předpoklady platí (resp. závěr neplatí).

Případně můžeme dodat za jakých předpokladů by tvrzení platilo. V tomto případě bychom potřebovali A symetrickou.

Cv. 1. Spočtěte $(-1)A + 2BC$, kde A, B, C jsou následující matice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
&(-1)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 3 & (-1)\cdot 1 \\ (-1)\cdot 4 & (-1)\cdot 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5\cdot 1 + 9\cdot 2 & 5\cdot(-1) + 9\cdot 2 \\ 2\cdot 1 + 7\cdot 2 & 2\cdot(-1) + 7\cdot 2 \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 23 & 13 \\ 16 & 12 \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cdot 23 & 2\cdot 13 \\ 2\cdot 16 & 2\cdot 12 \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 46 & 26 \\ 32 & 24 \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} -3+46 & -1+26 \\ -4+32 & -1+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 25 \\ 28 & 23 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cv. 2. Vyřešte soustavy rovnic $(A \mid b)$ a $(B \mid c)$ zadané

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ a $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Pro vaše řešení x (respektive y) proveďte zkoušku výpočtem součinu Ax a ověřením rovnosti vektorů $Ax = b$ (respektive součinu By a ověřením rovnosti $By = c$).

Řešení:

Řešením první soustavy rovnic $Ax = b$ je vektor $x = (1, 0)^T$. Výsledek ověříme zkouškou

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešením druhé soustavy rovnic $By = c$ je vektor $y = (-1-t, t, 2)^T$, kde $t \in \mathbb{R}$. Výsledek ověříme zkouškou:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1-t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1-t) + 1\cdot t + 2\cdot 2 \\ 1\cdot(-1-t) + 1\cdot t + 1\cdot 2 \\ 2\cdot(-1-t) + 2\cdot t + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 3. Vyjádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic. Tedy pro každou elementární řádkovou úpravu najděte matici $E \in \mathbb{R}^{m\times m}$, že EA je matice, kterou dostaneme aplikováním dané řádkové úpravy na libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

<u>Řešení</u>:

(a) *Vynásobení i-tého řádku skalárem $\alpha \neq 0$.* Můžeme zapsat pomocí matice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme matici identity a na pozici i, i zaměníme 1 za α. Násobením touto maticí **zleva** násobíme i-tý řádek konstantou α.
To můžeme ověřit z definice součinu matic. Nechť A je libovolná matice řádu $m \times n$ a E je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom EA je také matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $j \in [m]$ a sloupec $k \in [n]$ platí:

$$\begin{aligned} [EA]_{j,k} &= \sum_l E_{j,l} A_{l,k} \\ &= E_{j,j} A_{j,k} && (E_{j,l} \neq 0 \text{ pouze pro } l = j) \\ &= \begin{cases} A_{j,k} & \text{pro } j \neq i \\ \alpha A_{j,k} & \text{pro } j = i \end{cases} && (\text{dosadíme za } E_{j,j}) \end{aligned}$$

Vidíme, že EA má všechny řádky kromě i-tého shodné s maticí A a i-tý řádek je vynásoben skalárem α.

(b) *Výměna i-tého a j-tého řádku.* Můžeme zapsat pomocí matice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme matici identity a vyměníme její i-tý a j-tý řádek. Násobením touto maticí **zleva** vyměňujeme i-tý a j-tý řádek.

Ověření zase provedeme z definice násobení. Nechť A je libovolná matice řádu $m \times n$ a E je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom EA je také matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $k \in [m]$ a sloupec $l \in [n]$ platí:

$$\begin{aligned}
[EA]_{k,l} &= \sum_{\ell'} E_{k,\ell'} A_{\ell',l} \\
&= \begin{cases} E_{k,k} A_{k,l} & \text{pro } k \neq i, j \\ E_{k,i} A_{i,l} & \text{pro } k = j \\ E_{k,j} A_{j,l} & \text{pro } k = i \end{cases} \qquad \text{(pro ostatní hodnoty } \ell' \text{ je } E_{k,\ell'} = 0) \\
&= \begin{cases} A_{k,l} & \text{pro } k \neq i, j \\ A_{i,l} & \text{pro } k = j \\ A_{j,l} & \text{pro } k = i \end{cases} \qquad \text{(dosadíme příslušné hodnoty z matice } E)
\end{aligned}$$

Vidíme, že EA má všechny řádky kromě i-tého a j-tého shodné s maticí A a i-tý a j-tý řádek jsou vyměněny.

(c) *Přičtení α-násobku i-tého řádku k j-tému řádku, kde $i \neq j$.* Můžeme zapsat pomocí matice

$$E = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme matici identity a na pozici i, j zaměníme nulu za α. Násobením touto maticí **zleva** přičítáme α-násobek j-tého řádku k i-tému.

Ověření provedeme z definice součinu matic. Nechť A je libovolná matice řádu $m \times n$ a E je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom EA je také matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $k \in [m]$ a sloupec $l \in [n]$ platí:

$$\begin{aligned}
[EA]_{k,l} &= \sum_{\ell'} E_{k,\ell'} A_{\ell',l} \\
&= \begin{cases} E_{k,k} A_{k,l} & \text{pro } k \neq i \\ E_{k,k} A_{k,l} + E_{k,j} A_{j,l} & \text{pro } k = i \end{cases} \\
&\qquad \text{(pro ostatní hodnoty } m \text{ je } E_{k,\ell'} = 0) \\
&= \begin{cases} A_{k,l} & \text{pro } k \neq i \\ A_{k,l} + \alpha A_{j,l} & \text{pro } k = i \end{cases} \\
&\qquad \text{(dosadíme příslušné hodnoty z matice } E)
\end{aligned}$$

Vidíme, že všechny řádky kromě i-tého zůstaly zachovány a k i-tému řádku jsme přičetli α násobek j-tého řádku.

Cv. 4. Dokažte, anebo vyvraťte, zda pro matice A, B, C a $\mathbf{0}$ stejného řádu a reálná čísla α, β platí:

(a) $A+(B+C) = (A+B)+C$

(b) $A+B = B+A$

(c) $A+\mathbf{0} = A$

(d) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

(e) $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$

(f) $A+(-1)A = \mathbf{0}$

(g) $1A = A$

(h) $A(B+C) = AB+AC$

(i) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

(j) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

(k) $\alpha A + \beta B = (\alpha+\beta)(A+B)$

(l) $(A^T)^T = A$

(m) $A^T A$ je symetrická

(n) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(o) $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$

(p) $AI_n = A$

Řešení:

(a) Tvrzení platí.

Nejdříve ukážeme, že levá i pravá strana dávají smysl a mají stejné rozměry. Matice A, B, C jsou všechny stejného řádu, označíme si jejich rozměry jako $m \times n$. Pak na levé straně sčítáme $B + C$, což jsou obě matice řádu $m \times n$ a dostáváme novou matici řádu $m \times n$. Tu přičítáme k matici A, která je rovněž řádu $m \times n$. Tedy levá strana dává smysl a výsledkem je matice řádu $m \times n$.

Obdobně pro pravou stranu dostáváme že $(A + B) + C$ dává smysl a výsledkem je vždy matice $m \times n$.

Nyní ukážeme, že se matice rovnají porovnáním po složkách. Pro každé $i \in [n]$ a $j \in [m]$ platí:

$$\begin{aligned}
[A + (B + C)]_{i,j} &= [A]_{i,j} + [(B + C)]_{i,j} \\
&= [A]_{i,j} + ([B]_{i,j} + [C]_{i,j}) \\
&= ([A]_{i,j} + [B]_{i,j}) + [C]_{i,j} && \text{(asociativita sčítání v } \mathbb{R}) \\
&= [(A + B)]_{i,j} + [C]_{i,j} \\
&= [(A + B) + C]_{i,j}.
\end{aligned}$$

(b) Tvrzení platí.

Podobně jako v předchozím příkladě. Nejprve ukážeme, že obě strany dávají pro všechny uvažované matice A, B smysl a výsledky mají shodné rozměry. Poté ukazujeme rovnost po složkách, tedy pro každé $i \in [n]$ a $j \in [m]$:

$$\begin{aligned}
[A + B]_{i,j} &= [A]_{i,j} + [B]_{i,j} \\
&= [B]_{i,j} + [A]_{i,j} && \text{(komutativita sčítání v } \mathbb{R}) \\
&= [B + A]_{i,j}.
\end{aligned}$$

(c) Tvrzení platí.

(d) Tvrzení platí.

(e) Tvrzení platí.

(f) Tvrzení platí.

(g) Tvrzení platí.

(h) Tvrzení platí (jedná se o distributivitu násobení a sčítání). Aby obě strany dávaly smysl musí A, B, C splňovat:

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$$

(jinak nedává ani jedna strana smysl). Díky předpokladu, že A, B, C jsou stejého řádu, tedy musí být všechny matice čtvercové.

(i) Tvrzení platí.

(j) Tvrzení platí.

(k) Tvrzení neplatí.

Ukážeme pomocí protipříkladu. Najdeme α, β, A, B, která splňují zadání, ale pro něž tvrzení neplatí. Například

$$\alpha = 2,\ \beta = 3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme

$$\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} (\alpha + \beta)(A + B).$$

(l) Tvrzení platí.

Je-li A matice řádu $m \times n$, pak A^T je matice řádu $n \times m$ a $(A^T)^T$ je opět matice řádu $m \times n$. Tedy matice na pravé i levé straně mají shodné rozměry.

Poté dokazujeme rovnost po složkách, pro všechny $i \in [m]$ a $j \in [n]$:

$$[(A^T)^T]_{i,j} = [A^T]_{j,i} = [A]_{i,j}.$$

(m) Tvrzení platí.

Matice D je symetrická pokud platí $D = D^T$. Prvně si uvědomme, že pokud matice A je rozměrů $m \times n$, pak matice A^T je rozměrů $n \times m$. Násobení matic $A^T A$ tedy dává smysl a jeho výsledkem je matice rozměrů $n \times n$.

Dále dle Věty 3.13 (Vlastnosti transpozice) ze skript víme, že pro všechny matice D, E vhodných rozměrů (takových aby šly vynásobit) platí $(DE)^T = E^T D^T$. Proto dostáváme:

$$\begin{aligned} (A^T A)^T &= A^T (A^T)^T && \text{(dle } (DE)^T = E^T D^T\text{)} \\ &= A^T A. && \text{(předchozí tvrzení)} \end{aligned}$$

(n) Tvrzení platí.

(o) Tvrzení platí.

(p) Tvrzení platí pouze pokud A je matice řádu $m \times n$ pro nějaké m a n shodující se s I_n. Jinak levá strana nedává smysl.

Cv. 5. Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovu matici A zkonstruujte symetrickou matici B tak, že jejich součin nekomutuje, t.j. $AB \neq BA$. Komutuje součin matic pokud jsou obě matice symetrické?

Řešení:
Pro první část můžeme vybrat například matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pak

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Tvrzení neplatí ani pokud jsou obě matice symetrické. Volíme například matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \neq$$

$$\neq \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = BA.$$

Cv. 6. Dokažte nebo vyvraťte:

(a) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pokud A je symetrická a komutuje s B, pak A komutuje s B^T.

(b) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pokud A komutuje s B, pak A komutuje s B^T.

Řešení:

(a) Tvrzení platí, $AB^T = A^T B^T = (BA)^T = (AB)^T = B^T A^T = B^T A$.

(b) Tvrzení neplatí, například

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$