Úloha 4

Nechť X_i je zisk z i-té otázky a Z_i je jev, zda i-tou otázku zná.

(a)

Odpovídá jen pokud zná odpověď, tedy $X_i = \mathbb{I}_{Z_i}$.

$$E(X_i) = q, \quad E\Big(\sum_{i=1}^{20} X_i\Big) = 20q.$$

(b)

Při neznalosti tipuje, pak podle věty o úplné střední hodnotě:

$$E(X_i) = E[X_i|Z_i]\cdot P[Z_i]+E[X_i|Z_i^c]\cdot P[Z_i^c] = 1\cdot q+\big(\tfrac{1}{4}\cdot 1+\tfrac{3}{4}\cdot(-\tfrac{1}{4})\big)\cdot(1-q) = q+-\frac{1}{16}(1-q) = \frac{1}{16}+\frac{5}{16}q.$$

(c)

Správná penalizace je $-\frac{1}{3}$.

Úloha 5

Nechť Z je jev, že počítač zmrzne and označme X počet dnů, než nastanou dvě zamrznutí po sobě. Spočítáme podmíněné střední hodnoty X v závislosti zamrznutí prvních dnech.

$$E[X|ZZ] = 2$$

Počítač dvakrát zamrzl, tedy počet dní je přesně 2.

$$E[X|Z^c] = E[X] + 1$$

Počítač první den nezamrzl, tedy čekáme „nanovo“, ale jeden den už uplynul.

$$E[X|ZZ^c] = E[X] + 2$$

Počítač první den zamrzl, ale druhý den nikoli. Tedy opět čekáme „nanovo“, ale uplynuly dva dny.

Z věty o úplné střední hodnotě tedy máme

$$E[X] = (1-p)E[X|Z^c] + p(1-p)E[X|ZZ^c] + p^2E[X|ZZ].$$

(Všimněte si, že jevy Z^c, ZZ^c, ZZ tvoří rozklad pravděpodobnostního prostoru.)

Po dosazení dopočítáme, že

$$E[X] = \frac{1+p}{p^2}.$$

Úloha 7

Pro $X \sim \mathrm{Uni}(-2, 2)$:

$$E(X) = 0, \quad E(X^2) = \frac{1}{5}\sum_{k=-2}^{2} k^2 = \frac{10}{5} = 2.$$

$$\mathrm{var}(X) = 2.$$

Úloha 9

$$\mathrm{var}(X+b) = E((X+b-E(X)-b)^2) = E((X-E(X))^2) = \mathrm{var}(X).$$

Úloha 10

(a)

$Z_1 = \max(X, Y)$

$$P(Z_1 \leq k) = \left(\frac{k}{4}\right)^2 \Rightarrow P(Z_1 = k) = \frac{k^2-(k-1)^2}{16} = \frac{2k-1}{16}.$$

(b)

$Z_2 = X + Y$

$$P(Z_2 = k) = \frac{\#\{(x,y) : x+y=k\}}{16}.$$

(c)

$Z_3 = XY$ Analogicky spočteme počty dvojic vedoucích k danému součinu.

Úloha 11

(a)

Stejné díky linearitě střední hodnoty.

(b)

Platí

$$E(Z_3) = E(XY) = E(X)E(Y) = E(X)^2,$$

kde první rovnost je z definice, druhá z nezávislosti a třetí z faktu, že X a Y mají stejné distribuce (a tedy i stejnou střední hodnotu).

Potom tedy platí

$$E(Z_3) = E(X)^2 \leq E(X^2)$$

z Jensenovy nerovnosti, viz `https://en.wikipedia.org/wiki/Jensen%27s_inequality#Probabilistic_form`, kde za konvexní funkci použijeme x^2.