

4. cvičení z PSt

1. Po hodu kostkou definujme náhodnou veličinu X jako čistou výhru.

$$P(X = 10) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 7) = \frac{1}{6}, \quad P(X = -5) = \frac{4}{6}.$$

Podle definice střední hodnoty

$$E(X) = 10 \cdot \frac{1}{6} + 7 \cdot \frac{1}{6} + (-5) \cdot \frac{4}{6} = \frac{10 + 7 - 20}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Střední hodnota výhry je $-\frac{1}{2}$.

2. Označme X počet vytažených ponožek do okamžiku, kdy máme dvě stejné barvy.

Po prvním tahu máme jednu ponožku.

Po druhém tahu:

- s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ dostaneme stejnou barvu a končíme, tedy $X = 2$,
- s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ dostaneme druhou barvu a třetí ponožka už nutně vytvoří shodu, tedy $X = 3$.

Proto

$$P(X = 2) = \frac{1}{2}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{2}.$$

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

3. (a) Označme X čistou výhru v jednom kole při sázce x .

$$E(X) = (-x) \cdot \frac{1}{2} + (2x) \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{2}.$$

(b) Necht' před kolem máme M korun a vsadíme $x \leq M$. Střední hodnota peněz po kole je

$$M + E(X) = M + \frac{x}{2}.$$

Ta je rostoucí v x , proto je optimální volit $x = M$ (vsadit vše).

Po jednom kole je střední hodnota $\frac{3}{2}M$. Po n kolech tedy

$$E(M_n) = k \left(\frac{3}{2} \right)^n.$$

(c) Při strategii „vždy vsadím všechno“ skončíme s nenulovým obnosem pouze tehdy, když vyhraje všech n kol.

$$P(\text{výhra všech kol}) = \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Pravděpodobnost bankrotu je tedy

$$1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

4. Hodíme n -krát mincí, $P(P) = p$.

(a) Pro $i = 1, \dots, n-1$ definujeme indikátory

$$X_i = \mathbf{1}_{\text{na pozicích } i, i+1 \text{ padlo } PO}.$$

Pak

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} X_i.$$

Linearitou střední hodnoty

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n-1} P(X_i = 1).$$

$$P(X_i = 1) = p(1-p).$$

Proto

$$E(X) = (n-1)p(1-p).$$

(b) X nemá binomické rozdělení, protože indikátory X_i nejsou nezávislé (např. výskyt PO na pozicích $(i, i+1)$ vylučuje výskyt PO na $(i+1, i+2)$).

(c) Pro $i = 1, \dots, n-2$ definujeme

$$Y_i = \mathbf{1}_{\text{na pozicích } i, i+1, i+2 \text{ padlo } POP}.$$

Pak

$$Y = \sum_{i=1}^{n-2} Y_i.$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n-2} P(Y_i = 1).$$

$$P(Y_i = 1) = p(1-p)p = p^2(1-p).$$

Proto

$$E(Y) = (n-2)p^2(1-p).$$

5. Uvažujme náhodný graf $G(n, p)$.

(a) Každá z $\binom{n}{2}$ hran vznikne nezávisle s pravděpodobností p . Počet hran X má tedy rozdělení

$$X \sim \text{Bin}\left(\binom{n}{2}, p\right).$$

Střední hodnota je

$$E(X) = \binom{n}{2}p.$$

(b) Pro každou trojici vrcholů $A \in \binom{V}{3}$ definujeme indikátor

$$I_A = \mathbf{1}_{\text{trojice } A \text{ tvoří trojúhelník.}}$$

Pak

$$T = \sum_{A \in \binom{V}{3}} I_A.$$

Trojice tvoří trojúhelník právě tehdy, když existují všechny tři hrany, což má pravděpodobnost p^3 . Proto

$$E(T) = \sum_{A \in \binom{V}{3}} E(I_A) = \binom{n}{3} p^3.$$

6. (a) Pro indikátorovou náhodnou veličinu I_A platí

$$E(I_A) = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot (1 - P(A)) = P(A).$$

(b) Nechť $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$.

Jev A nenastane právě tehdy, když nenastane žádný z jevů A_i , tedy $I_{A_i} = 0$ pro všechna i .
Pak

$$1 - I_A = \prod_{i=1}^n (1 - I_{A_i}).$$

(c) Roznásobením součinu dostaneme

$$1 - I_A = 1 - \sum_i I_{A_i} + \sum_{i < j} I_{A_i} I_{A_j} - \sum_{i < j < k} I_{A_i} I_{A_j} I_{A_k} + \dots + (-1)^n I_{A_1} \dots I_{A_n}.$$

Použitím linearity střední hodnoty získáme princip inkluze a exkluze.