

3. cvičení z PSt

Nezávislé jevy

1. Necht' A, B jsou nezávislé, tj.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Pak

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c).$$

Tedy A a B^c jsou nezávislé.

Pro důkaz, že i A^c, B^c jsou nezávislé lze použít první část jako lemma a aplikovat jej ještě jednou.

2.

(a) Jsou-li A, B disjunktní, pak $P(A \cap B) = 0$. Nezávislost vyžaduje

$$0 = P(A)P(B).$$

To nastane právě když $P(A) = 0$ nebo $P(B) = 0$.

(b) Je-li $A \subseteq B$, pak $A \cap B = A$ a

$$P(A) = P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Tedy

$$P(A)(1 - P(B)) = 0,$$

což nastane právě když $P(A) = 0$ nebo $P(B) = 1$.

3.

(a) Necht'

$$\Omega = \{0, 1\}^3$$

s rovnoměrnou pravděpodobností. Definujme

$$A = \{x_1 = 1\}, \quad B = \{x_2 = 1\}, \quad C = \{x_3 = 1\}.$$

Nezávislost se pak snadno ověří z definice.

(b) Např.

$$\Omega = \{0, 1\}$$

s rovnoměrnou pravděpodobností. Necht'

$$A = B = \{0\}, \quad C = \emptyset.$$

Pak

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0,$$

a

$$P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Nicméně jevy A a B nejsou nezávislé.

Lze najít i takovou trojici, kde má každý jev pravděpodobnost z intervalu $(0, 1)$. Lze to dokonce i na prostoru modelující hod kostkou. Dokážete takovou trojici najít?

(c) Necht

$$\Omega = \{0, 1\}^2$$

s rovnoměrnou pravděpodobností a

$$A = \{x_1 = 1\}, \quad B = \{x_2 = 1\}, \quad C = \{x_1 \oplus x_2 = 1\}.$$

Pak

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2},$$

a snadno se ověří

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad P(A \cap C) = P(A)P(C), \quad P(B \cap C) = P(B)P(C),$$

tedy jsou po dvou nezávislé.

Avšak

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C).$$

Náhodné veličiny

4. Necht $p = 1/10$.

(a)

$$P(X > k) = P(\text{prvních } k \text{ pokusů neúspěch}) = (1 - p)^k.$$

(b)

$$P(X = k) = P(k - 1 \text{ neúspěchů a pak zásah}) = (1 - p)^{k-1}p.$$

(c) Snadněji se počítá varianta s ostrými nerovnostmi, kterou zde uvedu. Pro libovolné hodnoty $a, b \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned} P(X > a + b \mid X > b) &= \frac{P(X > a + b, X > b)}{P(X > b)} \\ &= \frac{P(X > a + b)}{P(X > b)} \\ &= \frac{(1 - p)^{a+b}}{(1 - p)^b} \\ &= (1 - p)^a \\ &= P(X > a). \end{aligned}$$