

2. cvičení z PSt

Podmíněná pravděpodobnost, Bayesova věta

1. Označme A jev „padly dvě panny“, B „první hod je panna“, C „alespoň jeden hod je panna“.

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

$$P(A | C) = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

2.

$$P(A | B) > P(A) \iff \frac{P(A \cap B)}{P(B)} > P(A) \iff P(A \cap B) > P(A)P(B).$$

Analogicky

$$P(B | A) > P(B) \iff P(A \cap B) > P(A)P(B).$$

Tvrzení jsou ekvivalentní.

3. Celkem 96 dobrých, 4 zkažené.

(a)

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) = \frac{96}{100} \cdot \frac{95}{99}.$$

(b)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{96}{100} \cdot \frac{95}{99} \cdot \frac{94}{98}.$$

4. Označme N jev, že jsme vybrali normální kostku a Z jev, že jsme vybrali speciální kostku.

(a) Použijeme větu o úplné pravděpodobnosti s rozkladem N, Z .

$$P(1) = P(N)P(1 | N) + P(Z)P(1 | Z) = \frac{1}{4}.$$

(b) Bayes:

$$P(N | 1) = \frac{P(N)P(1 | N)}{P(1)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}}{1/4} = \frac{1}{2}.$$

5. S spam, O označen

(a)

$$P(O) = P(S)P(O | S) + P(S^c)P(O | S^c) = 0.8 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.05 = 0.73.$$

(b)

$$P(S^c | O) = \frac{P(S^c)P(O | S^c)}{P(O)} = \frac{0.01}{0.73}.$$

(c)

$$P(S | O^c) = \frac{P(S)P(O^c | S)}{P(O^c)} = \frac{0.8 \cdot (1 - 0.9)}{1 - 0.73} = \frac{0.08}{0.27}.$$

6. Nechť I jev „nevinná“, U „úmrť“. Žalobce tvrdí, že

$$P(I | UU) = \frac{1}{8500^2}.$$

To ale není pravda, údaj o syndromu náhlého úmrtí pouze tvrdí, že

$$P(U \mid I) = \frac{1}{8500}.$$

Pokud by úmrtí více dětí byly nezávislé jevy (*což nejspíše nejsou*, první chyba), máme pouze

$$P(UU \mid I) = \frac{1}{8500^2},$$

přičemž jev a podmínku nelze jen tak obrátit (druhá chyba).