1. cvičení z PSt

Na rozehřátí

1. Platí disjunktní rozklad

$$A \cup B = (A \setminus B) \dot{\cup} (B \setminus A) \dot{\cup} (A \cap B).$$

Tedy

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B).$$

Protože

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B), \quad P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B),$$

dostáváme

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

2. Házejme dvakrát.

Pokud padne HT nebo TH, rozhodneme (každý jev má pravděpodobnost $p(1-p)$). Pokud padne HH nebo TT, opakujeme.

Protože $P(\mathrm{HT}) = P(\mathrm{TH}) = p(1-p)$, rozdělení je spravedlivé.

3. Celkem $6^3 = 216$ možností.

Počet výsledků se součtem 11 je 27, se součtem 12 je 25.

$$P(11) = \frac{27}{216}, \qquad P(12) = \frac{25}{216}.$$

Pravděpodobnější je součet 11.

4. Každá součástka funguje s pravděpodobností $1 - p$.

(a) Sériové zapojení dvou prvků:

$$P = (1-p)^2.$$

(b) Paralelní zapojení dvou prvků:

$$P = 1 - p^2.$$

(c) Kombinace předchozích. Mělo by vyjít $(1-p^2) \cdot (1-p) \cdot (1 - p \cdot (2p - p^2))$.

5. V krabici je 96 dobrých a 4 vadné baterie.

(a) Bez vracení:

$$P = \frac{\binom{96}{3}}{\binom{100}{3}}.$$

(b) Alespoň dvě dobré:

$$P = \frac{\binom{96}{3} + \binom{96}{2}\binom{4}{1}}{\binom{100}{3}}.$$

(c) S vracením:

$$P = \left(\frac{96}{100}\right)^3.$$

Platí

$$\left(\frac{96}{100}\right)^3 > \frac{\binom{96}{3}}{\binom{100}{3}},$$

tedy (c) je větší než (a). Lze to nahlédnout bez počítání tak, že v (a) nám ubývají nabité baterky a jejich podíl tedy klesá, v (c) se jejich podíl nemění.

Podmíněná pravděpodobnost

6. Předpokládejme dvě děti, pohlaví jsou nezávislá, $P(\text{chlapec}) = P(\text{dívka}) = \frac{1}{2}$.

(i) Králem se stává nejstarší syn.
Možnosti (v pořadí starší–mladší):

$$BB,\ BG,\ GB,\ GG.$$

Král existuje právě tehdy, když je alespoň jeden syn. Možné případy:

$$BB,\ BG,\ GB.$$

Ve dvou z nich má král bratra (BB, GB). Proto

$$P(\text{král má bratra}) = \frac{2}{3}.$$

(ii) Králem se stává nejstarší potomek.
Král je tedy vždy starší dítě. Podmínkou existence krále je, že starší dítě je chlapec.
Možnosti:

$$BB,\ BG.$$

Pouze v případě BB má král bratra. Tedy

$$P(\text{král má bratra}) = \frac{1}{2}.$$