

13. cvičení z PSt

1.

1. $H_0 : p = 1/2$. $H_1 : p \neq 1/2$ (případně jednostranná $H_1 : p > 1/2$, pokud byl směr stanoven předem). Testová statistika T je počet padnutých hlav X . Za H_0 platí $X \sim \text{Bin}(100, 1/2)$. Pro oboustranný test určíme p-hodnotu vzorečkem jako $p = P(|X - 50| \geq 10) \approx 0.0569$. Na hladině $\alpha = 0.05$ těsně nezamítáme.
2. Párový design. Diference $D_i = \text{tlak_před}_i - \text{tlak_po}_i$. $H_0 : \mathbb{E}[D_i] = 0$, $H_1 : \mathbb{E}[D_i] > 0$. Lze použít párový t-test (vzorečkem t_{29}) nebo permutační test se záměnou znamének u D_i (simulací). Jednostranný test.
3. H_0 : pravděpodobnosti všech stěn jsou $1/6$. H_1 : alespoň jedna pravděpodobnost se liší. Test χ^2 dobré shody, $T = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 3.4$. Za H_0 má T přibližně rozdělení χ_5^2 (vzorečkem). Vychází $p \approx 0.639$, nezamítáme. Formálně jde o jednostranný test zprava.
4. $H_0 : X_i \sim \text{Uniform}[0, 1]$, tedy $\mathbb{E}X_i = 1/2$ a $\text{Var}X_i = 1/12$. H_1 : generátor nemá správný průměr (případně jednostranná alternativa). Využijeme z-test pomocí CLV (vzorečkem), $T = \frac{\bar{X} - 1/2}{\sqrt{1/12}/\sqrt{n}}$. Oboustranný (nebo jednostranný) test.
5. H_0 : pravděpodobnost příchodu e-mailu pro daný den je $1/7$. H_1 : alespoň jeden den má jinou pravděpodobnost. Test χ^2 pro počty v 7 kategoriích s rozdělením χ_6^2 (vzorečkem). Jednostranný test zprava. Lze i testovat fixní den oproti očekávání, pak je ale nutná korekce na násobné testování.
6. $H_0 : p_{\text{stará}} = p_{\text{nová}}$, $H_1 : p_{\text{nová}} > p_{\text{stará}}$. Permutační test relabelováním uživatelů mezi verzemi (simulací), případně dvouvýběrový z-test pro proporce (vzorečkem). Jednostranný test.
7. H_0 : žádný vztah (např. nezávislost po rozbití párování). H_1 : existuje vztah. Statistika je korelace r . Rozdělení lze získat permutací výsledků testů (simulací) nebo parametrickým testem nulové korelace (vzorečkem za předpokladu normality).
8. $H_0 : p = 0.25$, $H_1 : p \neq 0.25$. Testová statistika je počet preferujících online $X \sim \text{Bin}(70, 0.25)$. Lze spočítat přesný binomický test (pozorováno 32.9%), případně asymptotický z-test pro jeden podíl. Oboustranný test.

2.

1. Součet nezávislých normálních veličin má normální rozdělení, obecně platí $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$. Za platnosti H_0 je $\mu = \mu_0$, platí tedy $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2/n)$.
2. Za H_0 máme $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2/n)$. Po odečtení μ_0 získáme rozdělení $\mathcal{N}(0, \sigma^2/n)$ a po vydělení směrodatnou odchylkou σ/\sqrt{n} dojde ke standardizaci. Výsledkem je standardní normální rozdělení $\mathcal{N}(0, 1)$.

3.

1. Neznáme teoretický populační rozptyl σ^2 a musíme jej odhadovat pomocí výběrové směrodatné odchylky s . Z tohoto důvodu nelze použít z-test, ale používáme t-test.
2. Dosazením do vzorce získáme $T = \frac{5.4 - 5.0}{0.6/\sqrt{10}} \approx \frac{0.4}{0.1897} \approx 2.108$.

3. Kritická hodnota je $t_9(0.975) = 2.262$, z čehož plynou hranice $l = -2.262$ a $r = 2.262$. Protože absolutní hodnota naší statistiky do intervalu spadá ($|2.108| < 2.262$), nulovou hypotézu nezamítáme.

4.

1. H_0 : labely A a B jsou zaměnitelné (rozdělení obou skupin jsou stejná). H_1 : skupina A má větší střední hodnotu.

2. $T_{\text{obs}} = \bar{X}_A - \bar{X}_B = \frac{2+4+5}{3} - \frac{1+3}{2} = \frac{11}{3} - 2 = \frac{5}{3} \approx 1.667$.

3. Postačí vybrat, které 3 z celkových 5 hodnot dostanou label A . Zbylé 2 automaticky dostanou label B . Počet všech možných relabelování je dán kombinačním číslem $\binom{5}{3} = 10$. Není nutné počítat $5!$.

4. Celkový součet čísel v obou skupinách je fixní (15). Z 10 možných relabelování vedou k testové statistice $T \geq 5/3$ právě 2 případy (když je součet prvků ve skupině A roven 11 nebo 12). Přesná jednostranná p-hodnota je podíl těchto případů ke všem kombinacím, tedy $p = 2/10 = 0.2$. Na hladině $\alpha = 0.05$ nezamítáme.