

Cvičení z PSt – MSE, bias-variance, testování hypotéz

1. Uvažujeme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bern}(\theta)$ a $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Platí $\mathbb{E}[S] = n\theta$, $\text{Var}(S) = n\theta(1 - \theta)$.

(a) Zjišťujeme, které estimátory jsou nestranné. Nestranný estimátor musí splňovat $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$ pro libovolné θ :

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_1] = \frac{\mathbb{E}[S]}{n} = \frac{n\theta}{n} = \theta.$$

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_2] = \frac{n\theta + 1}{n + 2} \neq \theta \quad (\text{pro } \theta \neq 1/2).$$

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_3] = 0.42 \neq \theta \quad (\text{pro } \theta \neq 0.42).$$

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_4] = \mathbb{E}[X_1] = \theta.$$

Nestranné estimátory jsou tedy $\hat{\theta}_1$ a $\hat{\theta}_4$.

(b) Hledáme estimátor s nulovou variancí pro libovolné θ . Nulovou varianci má pouze deterministický odhad, tedy $\hat{\theta}_3 = 0.42$, pro který platí $\text{Var}(\hat{\theta}_3) = 0$.

(c) Odhad MSE pro $\theta = 1/2$ a $n > 1000$: Vychýlení (bias) pro $\hat{\theta}_1$ i $\hat{\theta}_2$ je v bodě $\theta = 1/2$ nulové, protože $\mathbb{E}[\hat{\theta}_2] = \frac{n/2+1}{n+2} = 1/2$.

$$\text{MSE}(\hat{\theta}_1) = \text{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{\theta(1 - \theta)}{n} = \frac{1}{4n}.$$

$$\text{MSE}(\hat{\theta}_2) = \text{Var}(\hat{\theta}_2) = \frac{n\theta(1 - \theta)}{(n + 2)^2} = \frac{n}{4(n + 2)^2} < \frac{1}{4n}.$$

$$\text{MSE}(\hat{\theta}_3) = (0.42 - 0.5)^2 = 0.0064.$$

$$\text{MSE}(\hat{\theta}_4) = \text{Var}(X_1) = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Pro velké n je $1/4n \ll 0.0064$, nejmenší MSE má tedy odhad $\hat{\theta}_2$.

(d) Viz tabulka.

j	Estimátor $\hat{\theta}_j$	$\mathbb{E}[\hat{\theta}_j]$	$\text{bias}(\hat{\theta}_j)$	$\text{Var}(\hat{\theta}_j)$	$\text{MSE}(\hat{\theta}_j)$
1	$\frac{S}{n}$	θ	0	$\frac{\theta(1-\theta)}{n}$	$\frac{\theta(1-\theta)}{n}$
2	$\frac{S+1}{n+2}$	$\frac{n\theta+1}{n+2}$	$\frac{1-2\theta}{n+2}$	$\frac{n\theta(1-\theta)}{(n+2)^2}$	$\frac{n\theta(1-\theta)+(1-2\theta)^2}{(n+2)^2}$
3	0.42	0.42	$0.42 - \theta$	0	$(0.42 - \theta)^2$
4	X_1	θ	0	$\theta(1 - \theta)$	$\theta(1 - \theta)$