11. cvičení z PSt

1. Nechť

$$\widehat{\theta}_{\mathrm{MLE}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(a)

$$E(\widehat{\theta}_{\mathrm{MLE}}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\cdot n\theta = \theta.$$

Estimátor je tedy nestranný.

(b) Vedle MLE estimátoru lze vzít například:

$$\widehat{\theta}_1 = X_1,$$

Je nestranný, protože

$$E(X_i) = \theta.$$

Rozptyl:

$$\mathrm{Var}(\widehat{\theta}_1) = \theta(1-\theta),$$

Pro MLE estomátor platí:

$$\mathrm{Var}(\widehat{\theta}_{\mathrm{MLE}}) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

MLE má tedy menší rozptyl. Zajímavé je, že tomto případě to platí pro každý nestranný estimátor θ!

2. Model:

$$Y_i = ax_i + b + \varepsilon_i, \qquad f(\varepsilon) = \frac{1}{2}e^{-|\varepsilon|}.$$

Hustota Y_i:

$$f(y_i) = \frac{1}{2}e^{-|y_i - ax_i - b|}.$$

Likelihood:

$$L(a,b) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2}e^{-|y_i-ax_i-b|} = 2^{-n}e^{-\sum_{i=1}^{n}|y_i-ax_i-b|}.$$

Log-likelihood:

$$\ell(a,b) = -n\log 2 - \sum_{i=1}^{n}|y_i - ax_i - b|.$$

Maximalizace $\ell(a,b)$ je tedy ekvivalentní minimalizaci

$$\sum_{i=1}^{n}|y_i - ax_i - b|.$$

3. Platí

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{MLE}} = \overline{X}, \qquad \widehat{\mu}' = \frac{1}{2}\overline{X}.$$

Protože

$$E(\overline{X}) = \mu, \qquad \mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{n},$$

máme pro MLE:

$$\mathrm{Bias}(\widehat{\mu}_{\mathrm{MLE}}) = 0,$$

$$\mathrm{Var}(\widehat{\mu}_{\mathrm{MLE}}) = \frac{1}{n},$$

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\mu}_{\mathrm{MLE}}) = \frac{1}{n}.$$

Pro druhý estimátor:

$$E(\widehat{\mu}') = \frac{\mu}{2},$$

tedy

$$\mathrm{Bias}(\widehat{\mu}') = -\frac{\mu}{2}.$$

Dále

$$\mathrm{Var}(\widehat{\mu}') = \frac{1}{4}\,\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{4n}.$$

A konečně

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\mu}') = \mathrm{Var}(\widehat{\mu}') + \mathrm{Bias}(\widehat{\mu}')^2 = \frac{1}{4n} + \frac{\mu^2}{4}.$$

Druhý estimátor má menší rozptyl, ale nenulový bias. Pro malá $|\mu|$ může mít menší MSE než MLE estimátor.