

8. cvičení z PSt — 6.–10.4.2026

Práce s distribuční funkcí a hustotou obecně

- Pro n.v. X s hustotou f_X vyjádřete (a) $P(X \in [0, 1])$ (b) $P(X > 0)$ (c) $P(X < 0)$
- Metrový klacek rozložíme na dva kusy – lomem v uniformně náhodném bodě. Buď X délka delší části.
(a) Jaké je rozdělení X ?
(b) Určete $\mathbb{E}(X)$.
- Pro jistý problém máme k dispozici dva algoritmy, A a B. Algoritmus C spočívá v tom, že si náhodně vybereme, který z algoritmů A, B spustíme – A bude mít pravděpodobnost p , B pravděpodobnost $1 - p$. Doba běhu A, B, C chápeme jako náhodné veličiny, označíme je X, Y, Z .
(a) Určete F_Z pomocí F_X, F_Y .
(b) Pokud jsou X, Y spojité, určete f_Z pomocí f_X, f_Y .
- * Buď X náhodná veličina s hustotou $f_X(t) = 1/t^2$ pro $t \geq 1$ a $f_X(t) = 0$ jinak.
(a) Ověřte, že se jedná o hustotu.
(b) Určete $\mathbb{E}(X)$.
(c) Spočtete distribuční funkci F_X .
(d) Určete $P(2 \leq X \leq 3)$.
(e) Buď $Y = 1/X$. Jaká je distribuční funkce náhodné veličiny Y ?
(f) Určete hustotu náhodné veličiny Y .

Distribuční funkce a nezávislost

- Nechť $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ pro $i = 1, \dots, n$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme $M = \min(X_1, \dots, X_n)$. Ukažte, že $M \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.
- Buď Y maximum z n uniformně náhodných čísel z intervalu $[0, 1]$.
(a) Najděte distribuční funkci F_Y .
(b) Odsud určete hustotu f_Y .
(c) Spočtete $\mathbb{E}(Y)$.
(d) Jak je to pro minimum těch čísel?
(e) * A co pro k -té nejmenší číslo?

Konvoluce

- Buďte $X, Y, Z \sim U(0, 1)$ nezávislé náhodné veličiny.
(a) Jaké je rozdělení $X + Y$? Určete hustotu (dvěma způsoby) – podle konvolučního vzorce i „podle obrázku“.
(b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu $[0, 1]$.
(c) Jak výsledek ověřit samplováním?
- Buďte $X, Y, Z \sim \text{Exp}(\lambda)$ nezávislé náhodné veličiny.
(a) Jaké je rozdělení $X + Y$? (b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$?

Sdružená hustota

- Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).
(a) Určete marginální hustoty f_X, f_Y .
(b) Určete také distribuční funkce $F_X, F_Y, F_{X,Y}$.
(c) Jsou X, Y nezávislé?
(d) Najděte $P(X + Y \leq 1)$ a $P(X > Y)$.

Bonus

10. Pro n.n.v. $X \sim U(0, 2)$ a $Y \sim U(0, 1)$ zkoumáme $P(X < Y)$. Řešte

(a) Přímou z obrázku.

(b) Rozborem možností n.v. Y pomocí vzorce (analogie věty o celkové pravděpodobnosti)

$$P(X < Y) = \int_0^1 f_Y(y)P(X < Y | Y = y)dy.$$

(c) Rozborem možností n.v. X pomocí vzorce

$$P(X < Y) = \int_0^2 f_X(x)P(X < Y | X = x)dx.$$

11. (Buffonova jehla) Na nekonečnou podlahu hodíme náhodně jehlu délky ℓ . Podlaha je z prken, jejichž okraje tvoří rovnoběžné přímky ve vzdálenosti $d \geq \ell$. Určete pravděpodobnost, že jehla bude přesahovat okraj některého prkna.