7. cvičení z PSt — 30.3.–3.4.2026

Připomeňte si, že distribuční funkce F_X je definována vztahem $F_X(x) = P(X \le x)$. Pro *spojitou náhodnou veličinu* X existuje nezáporná funkce f_X (hustota X) tak, že $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt$. Pak je

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(t)\ dt$$

Připomeňte si, jak se počítá určitý integrál pomocí primitivní funkce, a že to je přesně ono.

Platí také $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\ dx$ (pokud $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x)\ dx < \infty$) a obecněji

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f_X(t)\ dt.$$

Stejně jako pro diskrétní n.v. platí i zde, že $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Název	Hustota	Distribuční funkce	Střední hodnota	Rozptyl
Uniformní $U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciální $\mathbb{E}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Stand.norm. $N(0,1)$	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$	Φ	0	1
Normální $N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$	$\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$	μ	σ^2

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\Phi(x)$	0.00003	0.00135	0.02275	0.15866	0.500000	0.84135	0.97725	0.99865	0.99997

Další hodnoty viz `https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_normal_table` – sekce Cumulative.

Z každé kapitolky zkuste aspoň jeden příklad! Pokud se zaseknete, na konci jsou některé nápovědy.

Uniformní rozdělení

1. Předpokládejme, že tramvaj jezdí pravidelně každých 10 minut, ale ne nutně podle jízdního řádu (jsou všechny zpožděné). (a) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?
(b) Jaká je střední doba čekání? Jaká je směrodatná odchylka?

2. Pokud $U \sim U(0,1)$, jak z něj dostaneme $X \sim U(a,b)$? A jak naopak?

3. Jak pomocí $U \sim U(0,1)$ generovat hod šestistěnnou kostkou? * A co obecnou diskrétní náhodnou veličinu?

Exponenciální rozdělení

4. Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.
(a) Jaký je parametr λ, jaká je distribuční funkce?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?
(c) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?

5. Pokud $X \sim \mathbb{E}(\lambda)$, jaké rozdělení má cX (pro $c > 0$)?

6. Říkáme, že náhodná veličina X (resp. její rozdělení) *nemá paměť*, pokud

$$P(X > s + t \mid X \ge s) = P(X > t)$$

pro $s, t \geq 0$. Jinými slovy, doba, kterou jsme již čekali, nemá vliv na dobu, kterou budeme ještě čekat. Na třetím cvičení jsme viděli, že geometrické rozdělení nemá paměť.

(a) Ukažte, že ani exponenciální rozdělení nemá paměť. Platí dokonce, že je to jediné spojité rozdělení na kladných čísel bez paměti (a geometrické je jediné diskrétní bez paměti), ale to dokazovat nemusíte.

(b) Využijte toho na výpočet $\mathbb{E}(X \mid X \geq 1)$ pro $X \sim Exp(\lambda)$.

(c) * Využijte toho na výpočet $\mathbb{E}(X^2 \mid X \geq 1)$ pro $X \sim Exp(\lambda)$.

7. * Doba trvání ústní zkoušky má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 20 minut. Objednáni jsou dva studenti, Adam na 10:00, Blanka na 10:20. Pokud se zkoušení Adama protáhne, zkoušení Blanky začne až bude Adam hotový, jinak začne přesně v 10:20.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že když Blanka přijde, bude Adam už vyzkoušený?

(b) Jaká je střední hodnota času, po který bude muset Blanka čekat na dozkoušení Adama, pokud při jejím příchodu ještě Adam nebyl vyzkoušený?

(c) Jaká je střední hodnota času, kdy začne zkoušení Blanky?

(d) Jaká je střední hodnota času, kdy bude Blanka vyzkoušená?

Normální rozdělení

8. Nechť $Z \sim N(0, 1)$. Pomocí tabulky funkce Φ ověřte pravidlo 68–95–99.7 (česky též zvané pravidlo 3σ), neboli spočtěte

(a) $P(|Z| \leq 1)$

(b) $P(|Z| \leq 2)$

(c) $P(|Z| \leq 3)$

(d) Přepište, co to znamená pro n.v. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

9. Budeme modelovat množství sněhu, který bude na Silvestra v lyžařském areálu Ještěd, pomocí normálního rozdělení se střední hodnotou 40 (centimetrů) a směrodatnou odchylkou 10.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že nám model určí zápornou hodnotu sněhové pokrývky?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že sněhu bude něco mezi 50 a 70 cm?

Obecné operace s hustotou

10. Pro n.v. X s hustotou f_X vyjádřete (a) $P(X \in [0, 1])$ (b) $P(X > 0)$ (c) $P(X < 0)$

11. Buď X náhodná veličina s hustotou $f_X(t) = 1/t^2$ pro $t \geq 1$ a $f_X(t) = 0$ jinak.

(a) Ověřte, že se jedná o hustotu.

(b) Určete $\mathbb{E}(X)$.

(c) Spočtěte distribuční funkci F_X.

(d) Určete $P(2 \leq X \leq 3)$.

(e) Buď $Y = 1/X$. Jaká je distribuční funkce náhodné veličiny Y?

(f) Určete hustotu náhodné veličiny Y.

Bonus

12. Pomocí jedné n.v. $U \sim U(0, 1)$ vygenerujte n.v. s geometrickým rozdělením Geo(p). (a) můžete sečíst ve for-cyklu nějakou konečnou sumu, (b) * v konstantním čase.

K procvičení

13. $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(1, 4)$.

(a) Najděte lineární funkci $f(t) = a \cdot t + b$, aby $f(Y)$ měla stejnou distribuci jako X.

(b) Spočtěte $P(X \leq 1)$, $P(X > 2)$. (c) Spočtěte $P(Y < 0)$, $P(Y > 2)$.

14. Frantovi jsme ve skoku do dálky naměřili 9 metrů, což překonává světový rekord o 5 cm. Při měření jsme se ovšem dopustili chyby s rozdělením $N(0, 0.01)$. Jaká je pravděpodobnost, že byl rekord skutečně překonán?