

## 6. cvičení z PSt — 23.3.–27.3.2026

### Náhodné vektory

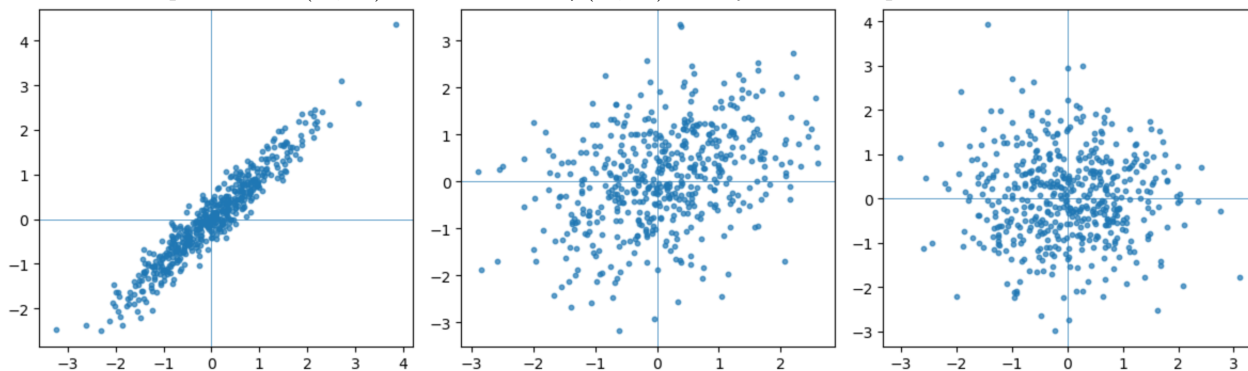
- $p_{X,Y}(x, y) := P(X = x \& Y = y)$
- $p_{X|Y}(x|y) := P(X = x | Y = y)$
- $p_X(x) = \sum_{y \in \text{Im } Y} p_{X,Y}(x, y)$

1. Na kostce padne číslo  $i$  s pravděpodobností  $p_i$  pro  $i = 1, \dots, k$ . Hodíme  $n$ -krát a označíme  $X_i$  počet hodů, kdy padlo  $i$ . (a) Najděte sdruženou pravděpodobnostní funkci pro n.v.  $X_1, \dots, X_k$ . (Bylo na přednášce!)  
 (b) Jaké je marginální rozdělení, tj. rozdělení jednotlivých n.v.  $X_i$ ?  
 (c) V téhle části je  $k = 3$ ,  $n = 10$ ,  $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$ . Určete  $p_{X_1|X_3}(4|4)$ .

### Kovariance a korelace

- $\text{cov}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) \stackrel{\text{veta}}{=} \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
- $\text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$
- $\text{cov}(X, Y)$  je lineární v obou složkách, tj. např.  $\text{cov}(X, a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 \text{cov}(X, Y_1) + a_2 \text{cov}(X, Y_2)$

2. Nezávislé náhodné veličiny  $X, Y$  mají střední hodnotu 0 a rozptyl 1. Položíme  $Z_0 = Y$ ,  $Z_1 = X + 0.3Y$  a  $Z_2 = 0.4X + Y$ . Spočítejte  $\text{cov}(X, Z_i)$  a také korelaci  $\rho(X, Z_i)$ . Který obrázek odpovídá kterému vzorci?



### Distribuční funkce

Připomeňte si, že distribuční funkce  $F_X$  je definována vztahem

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

3. Pro n.v.  $X$  s distribuční funkcí  $F_X$  vyjádřete (a)  $P(X \in (0, 1])$  (b)  $P(X > 0)$  (c) \*  $P(X < 0)$   
 (d) \*  $P(X \in [0, 1])$
4. Nechť  $X$  splňuje  $P(X = x) = 0$  pro každé  $x$ . Vyjádřete pomocí  $F_X$  distribuční funkci náhodných veličin  
 (a)  $-X$ . (b)  $X^+ = \max(0, X)$ , (c)  $|X|$ .

## Exponenciální rozdělení

Říkáme, že  $X$  má exponenciální rozdělení,  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , pokud

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{pro } x \geq 0, \text{ jinak } 0.$$

Na přednášce si ukážeme, že  $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$ .

**5.** Střední doba života harddisku je 4 roky. Předpokládejme, že tato doba je popsána náhodnou veličinou s exponenciálním rozdělením. (To není realistický předpoklad, viz např. <https://www.backblaze.com/blog/how-long-do-disk-drives-last/>.)

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že disk selže během prvních tří let?
- (b) Jaká je pravděpodobnost, že vydrží alespoň 10 let?
- (c) Po jaké době se rozbije 10 % disků?

**6.** Sledujeme noční oblohu a vyhlížíme meteory. Pro dnešní noc víme, že pravděpodobnost spatření meteoru během časového úseku  $dt$  je (pro malá  $dt$ ) rovna  $c \cdot dt$ , situace v disjunktních časových intervalech považujeme za nezávislé. Jaká je pravděpodobnost, že během doby  $t$  nic neuvidíme? [Klidně předpokládejte, že  $t/dt$  je celé číslo. Taky zkuste napsat  $dt = 1/n$  a vzpomenout si na limity z analýzy.]

## Bonus

**7.** Necht'  $X \sim \text{Bin}(m, p)$ ,  $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ , veličiny jsou nezávislé. Napřed si ujasněte, že  $X + Y$  má rozdělení  $\text{Bin}(m+n, p)$  (kvůli „pohádce“ o významu binomického rozdělení). Pak to ověřte pomocí konvolučního vzorce a sečtení sumy.

## K procvičení

**8.** Necht'  $F_X$  je dána předpisem  $F_X(x) = x/3$  pro  $x \in [0, 3]$ ,  $F_X(x) = 0$  pro  $x < 0$  a  $F_X(x) = 1$  pro  $x > 3$ . Necht'  $Y = 1/X$  a  $Z = X^2$ . Spočtete

- (a)  $P(1 \leq X \leq 2)$
- (b)  $P(X \leq Y)$
- (c)  $P(X \leq Z)$
- (d) hustotní funkci  $f_X$ .
- (e) distribuční funkce  $F_Y$  a  $F_Z$ .

**9.** Plutonium-238 má poločas rozpadu 87.7 let. Jeho rozpad budeme modelovat pomocí exponenciálního rozdělení: pro každý atom budeme čas, za který se rozpadne, považovat za nezávislou náhodnou veličinu s rozdělením  $\text{Exp}(\lambda)$ .

- (a) Jaké je  $\lambda$ ?
- (b) Jaká je střední doba života atomu plutonia-238?
- (c) Po jaké době se rozpadne 90 % atomů?
- (d) Kolik procent atomů se rozpadne po 50 letech? (Některé kardiostimulátory používají plutonium-238 jako zdroj energie. [https://en.wikipedia.org/wiki/Plutonium-238#Nuclear\\_powered\\_pacemakers](https://en.wikipedia.org/wiki/Plutonium-238#Nuclear_powered_pacemakers))

**10.** Doba, za kterou uvidíme meteor, je exponenciálně rozdělená se střední hodnotou 1 (minuta).

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že budeme muset čekat více než 5 minut?
- (b) Jaká je pravděpodobnost, že se dočkáme za nejvýše jednu minutu?
- (c) \* Jaké je rozdělení času, kdy uvidíme druhý meteor? Třetí, ... (Předpokládáme, že jednotlivé meteory jsou navzájem nezávislé.)