

3. cvičení z PSt — 2.–6.3.2026

Nezávislé jevy

Buď I libovolná množina indexů. Jevy $\{A_i : i \in I\}$ nazveme *nezávislé (independent)*, pokud pro každou konečnou množinu $J \subseteq I$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Pokud podmínka platí jen pro dvouprvkové množiny J , nazýváme jevy $\{A_i : i \in I\}$ *po dvou nezávislé (pairwise independent)*.

- Pokud jsou jevy A, B nezávislé, tak jsou nezávislé i jevy A, B^c . A také jevy A^c, B^c (kde $A^c = \Omega \setminus A$).
- Mohou být jevy A, B nezávislé a zároveň disjunktní?
 - Mohou být jevy A, B nezávislé a zároveň $A \subseteq B$?
- Najděte jevy A, B, C (na libovolném pravděpodobnostním prostoru), které
 - jsou nezávislé.
 - nejsou po dvou nezávislé, ale $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.
 - jsou po dvou nezávislé, ale $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

Náhodné veličiny

- Náhodná veličina* je přiřazení reálného čísla každému výsledku náhodného experimentu, neboli je to zobrazení $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (takové že ...)
 - Pravděpodobnostní funkce* $p_X(x) := \mathbb{P}(X = x)$. *Distribuční funkce* $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$.
- Prokop hází basketbalovým míčem na koš, v každém pokusu má pravděpodobnost zásahu $p = 1/10$, pokusy jsou nezávislé. Skončí po prvním zásahu. Označme X celkový počet hodů.
 - Jaká je $\mathbb{P}(X > k)$? Zkuste napřed pro $k = 1, k = 2$.
 - Jaká je $\mathbb{P}(X = k)$? Určení těchto čísel se nazývá popis rozdělení (= distribuce) X .
 - Jaká je $\mathbb{P}(X \geq 10 \mid X \geq 5)$?
 - * Pokračování: označme $Y = X \bmod 2$, tj. $Y = 0$, pokud je X sudé, jinak $Y = 1$. Určete distribuci Y .
 - Quido také hází míčem na koš, má pravděpodobnost p , že se trefí a také jsou hody nezávislé. Označme Z počet zásahů z n pokusů. Určete distribuci Z (tj. $P(Z = k)$ pro všechna k).
 - Hodíme dvěma kostkami – pro jednoduchost čtyřstěnnými, s čísly $1, \dots, 4$. Označíme X maximum ze dvou hozených čísel. Popište, jak budete tuto situaci modelovat: co bude Ω , co přesně za matematický objekt je X , jaká je p_X .

Název	Značení	Pravděpodobnostní funkce	Rozsah ($\text{Im}(X)$)	Střední hodnota
Bernoulliho	$X \sim \text{Ber}(p)$	$p_X(1) = p, p_X(0) = 1 - p$	$\{0, 1\}$	p
Binomické	$X \sim \text{Bin}(n, p)$	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$\{0, 1, \dots, n\}$	np
Geometrické	$X \sim \text{Geo}(p)$	$p_X(k) = (1 - p)^{k-1} p$	$\{1, 2, \dots\}$	$1/p$
Poissonovo	$X \sim \text{Poi}(\lambda)$	$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\{0, 1, \dots\}$	λ
Uniformní	$X \sim \text{Uni}(a, b)$	$p_X(k) = \frac{1}{b-a+1}$	$\{a, a+1, \dots, b\}$	$\frac{a+b}{2}$
Hypergeometrické	$X \sim \text{Hyp}(N, K, n)$	$p_X(k) =$	$\{0, 1, 2, \dots, \min(n, K)\}$	$n \frac{K}{N}$

- Na kroužku máme pět klíčů, jeden z nich je správný, ale my nevíme jaký. Zkoušíme otevřít dveře.

- (a) Po každém pokusu se nám kroužek vysmekne, a vybíráme vždy znovu náhodně.
- (b) Vybíráme v náhodném pořadí, ale každý klíč jenom jednou (můžeme si je poznačit).

V obou případech zkoumáme, kolikátým pokusem dveře otevřeme. Jaké je rozdělení této náhodné veličiny, tj., jaká je pravděpodobnost, že dveře otevřeme k -tým pokusem. Jaká je její střední hodnota? (Použijte tabulku.)

- (c) Jako část (a), ale správné jsou dva klíče z deseti.

(d) Jako část (b), ale správné jsou dva klíče z deseti. (Zde je určení střední hodnoty trochu těžší, stačí když určíte pravděpodobnostní funkci.)

9. Na přednášku je přihlášeno 234 lidí. Jaká je pravděpodobnost, že přesně jeden z nich má dnes narozeniny? Ignorujte přestupné roky, uvažujte, že všechny dny jsou stejně pravděpodobné pro narození.

- (a) Použijte binomické rozdělení.
- (b) Použijte aproximaci pomocí Poissonova rozdělení: $\text{Bin}(n, \lambda/n)$ je přibližně $\text{Poi}(\lambda)$.
- (c) Co se změní, když budu uvažovat narozeniny zítra?

10. V pytlíku je N bonbónů, z nichž K je dobrých. Náhodně vytáhneme n z nich, označíme X počet dobrých vytažených bonbónů.

- (a) Jak se jmenuje rozdělení n.v. X ?
- (b) Jaká je $P(X = k)$?
- (c) Určete $\mathbb{E}(X)$ – pomocí tabulky. Pro $n = 1$ si rozmyslete, že je to jasné.

Bonus

11. Najdete náhodné jevy A, B, C takové, že

- A, B jsou nezávislé za podmínky C , tj. $\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C)\mathbb{P}(B \mid C)$,
- A, B jsou nezávislé za podmínky C^c ,
- ale A, B nejsou nezávislé?

12. (Kasino v St. Petersburgu) Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n -tém hodů, dostaneme odměnu 2^n . Kolik byste byli ochotni zaplatit za účast v této hře?

K procvičení

13. V truhle je sto mincí. Z nich 99 je normálních, ale jedna má na obou stranách orla. Vytáhneme náhodnou minci a šestkrát s ní hodíme, pokaždé padne orel. Jaká je pravděpodobnost, že jsme si vytáhli „dvouorlovou“ minci? (Zkuste napřed odhadnout, pak spočítat.)

14. Na chorobu C máme dva testy, A a B . Test A má sensitivitu i specifitu $p = 0.95$. Test B vždy řekne, že pacient je zdravý. Předpokládejte, že $\mathbb{P}(C) = 0.01$.

(a) Spočtete pro oba testy pravděpodobnost úspěchu (tj. správné odpovědi), použijeme-li je na náhodného pacienta. Rozmyslete si, co to říká o užitečnosti obou testů.

- (b) Pro jaké p je pravděpodobnost úspěchu obou testů stejná?

15. Kouřovými signály přenášíme binární soubor. Je proto poměrně vysoká pravděpodobnost chyby u každého bitu: 0 se jako 0 přeneso jen s pravděpodobností 0.9, 1 jako 1 jen s pravděpodobností 0.8. Předpokládejme (trochu neseriózně), že jednotlivé znaky se přenášejí nezávisle. Dále předpokládejme, že ve vysílané zprávě je stejně nul a jedniček.

- (a) Pokud jsme dostali signál 0, jaká je pravděpodobnost, že byl opravdu vyslán?

- (b) Dostali jsme zprávu 0010. Jaká je pravděpodobnost, že byla opravdu vyslána?

(c) Jak se výpočet změní, pokud budeme pro kontrolu vysílat každý symbol třikrát (a pak vezmeme častější z těch tří pokusů)?

16. Nechť náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení, $X \sim \text{Poi}(\lambda)$. Připomeňte si vzorec pro pravděpodobnostní funkci $p_X(k)$. Ukažte, že $p_X(k)$ je rostoucí pro $k \leq \lfloor \lambda \rfloor$ a pak klesá, v limitě k nule.