Cvičení k přednášce 11.5. — testování hypotéz

1. Pro každou z následujících situací se pokuste vymyslet, jak ji napasovat do rámce testování hypotéz. U každé situace si rozmyslete co je H_0 a H_1, jakou testovou statistiku byste použili, zda byste rozdělení testové statistiky pod H_0 získali simulací nebo vzorečkem, a zda jde spíše o jednostranný, nebo oboustranný test. Typicky existuje více rozumných řešení.

1. Mince byla hozena 100×, padlo 60 hlav. Je mince férová?
2. Lék na vysoký tlak: u 30 pacientů změříme tlak před léčbou a po léčbě. Funguje?
3. Kostka byla hozena 60×, padly počty $(7, 9, 12, 8, 14, 10)$. Je kostka férová?
4. Generátor náhodných čísel má generovat rovnoměrně na intervalu $[0, 1]$. Z 1000000 vygenerovaných čísel vyšel průměr 0.58. Je generátor rozbitý?
5. Chodí mi do schránky e-maily stejně často každý den v týdnu?
6. Webová stránka má starou a novou verzi. Starou verzi vidělo 1000 lidí, kliklo 53. Novou vidělo 1200 lidí, kliklo 72. Zlepšila se nová verze?
7. Vzorek 40 studentů: korelace mezi počtem hodin učení a výsledkem testu je $r = 0.31$. Je tam vztah?
8. V dotazníku odpovědělo 23 ze 70 lidí, že preferují online cvičení. Loni to bylo 25%. Změnila se preference?

Bonus: Použijte počítač a spočtěte výsledky některých testů. Pokud neplatí nulová hypotéza, parametrické testy často dávají menší p-hodnoty než neparametrické testy; zkuste to ověřit na nějakém příkladu.

2. Rozmyslete si, proč má z-testová statistika za nulové hypotézy rozdělení $\mathcal{N}(0, 1)$. Speciálně, nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, kde σ je známé. Chceme testovat $H_0 : \mu = \mu_0$. V z-testu k tomu používáme testovou statistiku $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$.

1. Platí-li H_0, jaké rozdělení má výběrový průměr $\bar{X}$?
2. Ukažte, že pokud platí H_0, pak T má rozdělení $\mathcal{N}(0, 1)$.

3. Máme deset měření hladiny cukru v krvi z přibližně normálního rozdělení. Výběrový průměr vyšel $\bar{X} = 5.4$ mmol/l a výběrová směrodatná odchylka $s = 0.6$ mmol/l. Testujeme na hladině $\alpha = 0.05$ hypotézu $H_0 : \mu = 5.0$ proti oboustranné alternativě $H_1 : \mu \neq 5.0$.

1. Proč v této situaci používáme t-test a ne z-test?
2. Spočtěte testovou statistiku $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$. Platí-li H_0, má tato statistika Studentovo t-rozdělení s $n - 1$ stupni volnosti.
3. Najděte kritické hodnoty l, r rozdělení t_9 tak, že na hladině $\alpha = 0.05$ zamítáme právě tehdy, když T je mimo interval $[l, r]$. Rozhodněte, zda zamítáme H_0.

4. Máme dvě skupiny měření: $A = (2, 4, 5), \qquad B = (1, 3)$. Chceme testovat, zda má skupina A větší střední hodnotu než skupina B pomocí permutačního testu.

1. Formulujte H_0 a H_1.
2. Spočtěte pozorovanou statistiku $T_{\text{obs}} = \bar{X}_A - \bar{X}_B$.
3. Spočtěte distribuci T; rozmyslete si, že není potřeba projít $5!$ možností, ale jen $\binom{5}{3}$ možností.
4. Spočtěte přesnou jednostrannou permutační p-hodnotu, tedy podíl relabelování, pro která $T \geq T_{\text{obs}}$.