

Cvičení k přednášce 4.5. — MSE, bias–variance, testování hypotéz

(Připomenutí definic.) Estimátor $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ je libovolná funkce dat, jejíž hodnotu používáme jako odhad neznámého parametru θ . Jeho *bias* (vychýlení) je $\text{bias}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta$, jeho *variance* je $\text{Var}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}\left[\left(\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}]\right)^2\right]$ a jeho *střední kvadratická chyba* (MSE) je $\text{MSE}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right]$. Platí bias–variance decomposition: $\text{MSE}(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + \text{bias}(\hat{\theta})^2$.

1. Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bern}(\theta)$, kde $\theta \in [0, 1]$ je neznámý parametr. Označme $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Uvažujte čtyři estimátory parametru θ :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{S}{n}, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{S+1}{n+2}, \quad \hat{\theta}_3 = 0.42, \quad \hat{\theta}_4 = X_1.$$

- Které z těchto estimátorů jsou nestranné jako estimátory parametru θ ?
- Které z těchto estimátorů mají nulovou varianci pro libovolné θ ?
- Pokud $\theta = 1/2$ a $n > 1000$, tipněte si, který estimátor má nejmenší MSE.
- Vyberte si aspoň jeden estimátor $\hat{\theta}_j$ a spočtěte pro něj $\mathbb{E}[\hat{\theta}_j]$, $\text{bias}(\hat{\theta}_j)$, $\text{Var}(\hat{\theta}_j)$ a $\text{MSE}(\hat{\theta}_j)$.

2. Udělali jsme statistický test nulové hypotézy H_0 . Test vyšel signifikantně, H_0 jsme zamítli a p -hodnota byla $p = 0.01$.

U každého tvrzení označte, zda z výsledku logicky plyne.

- Vyvrátili jsme nulovou hypotézu H_0 . ano ne
- Zjistili jsme, že pravděpodobnost nulové hypotézy je 1%. ano ne
- Dokázali jsme alternativní hypotézu. ano ne
- Zjistili jsme, že pravděpodobnost alternativní hypotézy je 99%. ano ne
- Když jsme zamítli H_0 , pravděpodobnost, že jsme se rozhodli špatně, je 1%. ano ne
- Výsledek je spolehlivý v tom smyslu, že kdybychom experiment mnohokrát opakovali, dostali bychom signifikantní výsledek v 99% případech. ano ne

Tenhle dotazník dostali učitelé metodologie budoucích vědeckých pracovníků v medicíně; tipněte si, kolik procent učitelů a kolik procent studentů odpovědělo správně na všechny otázky.

3. Děláme 20 nezávislých testů. Předpokládejme, že všech 20 nulových hypotéz je ve skutečnosti pravdivých. Každý test děláme na hladině $\alpha = 0.05$.

- Jaká je pravděpodobnost, že jeden konkrétní test falešně zamítne svoji nulovou hypotézu?
- Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden z 20 testů falešně zamítne?
- Proč je to problém, když používáme hranici 0.05 u každého testu zvlášť?
- (Bonferroniho korekce) Nyní si představme, že každý z 20 testů děláme na hladině $\alpha' = 0.05/20$.

Dokažte, že pravděpodobnost, že aspoň jeden z 20 testů falešně zamítne nulovou hypotézu, je nejvýše 0.05, ať už jsou jednotlivé testy nezávislé nebo ne.