Cvičení k přednášce 27.4. — MLE, bias, rozptyl

(Připomenutí definic.) Estimátor $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ je libovolná funkce dat, jejíž hodnotu používáme jako odhad neznámého parametru θ. Jeho *bias* (vychýlení) je $\text{bias}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta$, jeho *variance* je $\text{Var}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}\left[\left(\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}]\right)^2\right]$, a jeho *střední kvadratická chyba* (MSE) je $\text{MSE}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right]$.

1. Máme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Bern}(\theta)$, kde $\theta \in [0, 1]$ je neznámý parametr. Hodnota $X_i = 1$ znamená, že v i-tém hodu padla panna. MLE odhad je $\hat{\theta}_{MLE} = 1/n * \sum_{i=1}^n X_i$.

(a) Je $\hat{\theta}_{MLE}$ nestranný?

(b) Najděte alespoň dva různé nestranné estimátory parametru θ. Spočtěte a porovnejte jejich varianci.

2. V přednášce jsme odvodili, že lineární regrese metodou nejmenších čtverců (least squares) je MLE, pokud předpokládáme, že šum ε_i v modelu $Y_i = ax_i + b + \varepsilon_i$ je gaussovský. Předpokládejme teď místo toho, že šumy ε_i mají Laplaceovu hustotu $f(\varepsilon) = \frac{1}{2}e^{-|\varepsilon|}$. Ukažte, že MLE odhad $(\hat{a}, \hat{b})$ minimalizuje $\sum_{i=1}^n |y_i - ax_i - b|$. Jinými slovy: z čtverců reziduí se stanou absolutní hodnoty reziduí. (Vzorečku se říká *L1 regrese*.)

3. Máme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, 1)$, kde μ je neznámé. Klasický MLE estimátor je $\hat{\mu}_{MLE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Představme si ale, že z nějakého důvodu věříme, že skutečné μ je malé, a tak chceme odhad trochu „stáhnout“ k nule. Uvažujme proto estimátor $\hat{\mu}' = \frac{1}{2}\hat{\mu}_{MLE}$.

Pro oba estimátory spočtěte jejich bias, varianci, a MSE. Zkuste je porovnat.