

9. cvičení z PSt — 14.–18.4.2025

Distribuční funkce a nezávislost

1. Necht' $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ pro $i = 1, \dots, n$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme $M = \min(X_1, \dots, X_n)$. Ukažte, že $M \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.
2. Buď Y maximum z n uniformně náhodných čísel z intervalu $[0, 1]$.
 - (a) Najděte distribuční funkci F_Y .
 - (b) Odsud určete hustotu f_Y .
 - (c) Spočítejte $\mathbb{E}(Y)$.
 - (d) Jak je to pro minimum těch čísel?
 - (e) * A co pro k -té nejmenší číslo?

Sdružená hustota

3. Necht' X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).
 - (a) Určete marginální hustoty f_X, f_Y .
 - (b) Určete také distribuční funkce $F_X, F_Y, F_{X,Y}$.
 - (c) Jsou X, Y nezávislé?
 - (d) Najděte $P(X + Y \leq 1)$ a $P(X > Y)$.
4. (Buffonova jehla) Na nekonečnou podlahu hodíme náhodně jehlu délky ℓ . Podlaha je z prken, jejichž okraje tvoří rovnoběžné přímky ve vzdálenosti $d \geq \ell$. Určete pravděpodobnost, že jehla bude přesahovat okraj některého prkna.

Celková pravděpodobnost

5. Pro n.n.v. $X \sim U(0, 2)$ a $Y \sim U(0, 1)$ zkoumáme $P(X < Y)$. Řešte
 - (a) Přímou z obrázku.
 - (b) Rozborem možností n.v. Y pomocí vzorce (analogie věty o celkové pravděpodobnosti)

$$P(X < Y) = \int_0^1 f_Y(y)P(X < Y \mid Y = y)dy.$$

- (c) Rozborem možností n.v. X pomocí vzorce

$$P(X < Y) = \int_0^2 f_X(x)P(X < Y \mid X = x)dx.$$

Konvoluce

6. Buďte $X, Y, Z \sim U(0, 1)$ nezávislé náhodné veličiny.
 - (a) Jaké je rozdělení $X + Y$? Určete hustotu (dvěma způsoby) – podle konvolučního vzorce i „podle obrázku“.
 - (b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu $[0, 1]$.
 - (c) Jak výsledek ověřit sámkováním?
7. Buďte $X, Y, Z \sim \text{Exp}(\lambda)$ nezávislé náhodné veličiny.
 - (a) Jaké je rozdělení $X + Y$?
 - (b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$?

Nápověda

- 1: Vyjádřete $P(M > m)$ pomocí $P(X_i > m)$ pro $i = 1, \dots, n$.
- 2: a) Jaká je distribuční funkce Y pomocí distribučních fci těch uniformně náhodných čísel? b) $f = F'$
- 3d: Jedna část je lehká. Pro druhou nakreslete, přes jakou množinu se má integrovat. Pak případně vyjádřete jako dvojný integrál se správně zapsanými mezemi. Pokud zvlédnete to, zbytek je lehký.
- 4: Nakreslete obrázek a popište polohu jehly pomocí dvou náhodných proměnných (posun a úhel).
- 6, 7: Použijte vzorec na konci další stránky.

K procvičení

8. Volme uniformně náhodně bod z polokruhu o poloměru 1, se středem v počátku a v horní polovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.
- (a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.
 - (b) Najděte marginální hustotu f_Y a spočtěte pomocí ní $\mathbb{E}(Y)$.
 - (c) Pro kontrolu spočtěte $\mathbb{E}(Y)$ přímo (pomocí pravidla PNS).
9. Metrový klacek rozložíme na dva kusy – lomem v uniformně náhodném bodě. Buď D délka delší části.
- (a) Jaké je rozdělení D ?
 - (b) Určete $\mathbb{E}(D)$.

Bonus

10. Metrový klacek zlomíme v uniformně náhodném bodě a ponecháme si levý kus. Jeho délku označíme Y . V něm opět vybereme uniformně náhodný bod, kde klacek zlomíme, a délku levého kusu označíme X .
- (a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$. Může vám pomoci tzv. podmíněná hustota $f_{X|Y} = f_{X,Y}/f_Y$.
 - (b) Najděte marginální hustotu f_X .
 - (c) Pomocí f_X spočtěte $\mathbb{E}(X)$.
 - (d) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$ pomocí vztahu $X = Y \cdot (X/Y)$.

Soupis vzorečků

- Vztah sdružené hustoty a sdružené distribuční funkce

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) dt ds$$
$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

- Marginální hustota ze sdružené

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

- pro „rozumnou“ množinu A platí $P((X, Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x, y) dx dy$.
- **nezávislost:** $X \perp Y \iff F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$
- **PNS:** $\mathbb{E}(g(X)|B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|B}(x)dx$
- **Konvoluční vzorec:** Pro spojitě nezávislé n.v. X, Y má veličina $Z = X + Y$ hustotu

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx.$$