

8. cvičení z PSt — 7.–11.4.2025

Název	Hustota	Distribuční funkce	Střední hodnota	Rozptyl
Uniformní $U(a, b)$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciální $Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Stand.norm. $N(0, 1)$	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$	Φ	0	1
Normální $N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma} \varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$	$\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$	μ	σ^2

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\Phi(x)$	0.00003	0.00135	0.02275	0.15866	0.500000	0.84135	0.97725	0.99865	0.99997

Další hodnoty viz https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_normal_table – sekce Cumulative.

Z každé kapitolky zkuste aspoň jeden příklad! Pokud se zaseknete, na konci jsou některé nápovědy.

Uniformní rozdělení

- Předpokládejme, že tramvaj jezdí pravidelně každých 10 minut, ale ne nutně podle jízdního řádu (jsou všechny zpožděné). (a) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?
(b) Jaká je střední doba čekání? Jaká je směrodatná odchylka?

Exponenciální rozdělení

- Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.
(a) Jaký je parametr λ , jaká je distribuční funkce?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?
(c) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?
- Říkáme, že náhodná veličina X (resp. její rozdělení) *nemá paměť*, pokud

$$P(X > s + t \mid X \geq s) = P(X > t)$$

pro $s, t \geq 0$. Jinými slovy, doba, kterou jsme již čekali, nemá vliv na dobu, kterou budeme ještě čekat. Na třetím cvičení jsme viděli, že geometrické rozdělení nemá paměť.

- Ukažte, že ani exponenciální rozdělení nemá paměť. Platí dokonce, že je to jediné spojitě rozdělení na kladných číslech bez paměti (a geometrické je jediné diskrétní bez paměti), ale to dokazovat nemusíte.
- Využijte toho na výpočet $\mathbb{E}(X \mid X \geq 1)$ pro $X \sim Exp(\lambda)$.
- * Využijte toho na výpočet $\mathbb{E}(X^2 \mid X \geq 1)$ pro $X \sim Exp(\lambda)$.

- Doba trvání ústní zkoušky má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 20 minut. Objednání jsou dva studenti, Adam na 10:00, Blanka na 10:20. Pokud se zkoušení Adama protáhne, zkoušení Blanky začne až bude Adam hotový, jinak začne přesně v 10:20.

- Jaká je pravděpodobnost, že když Blanka přijde, bude Adam už vyzkoušený?
- Jaká je střední hodnota času, po který bude muset Blanka čekat na dozkoušení Adama, pokud při jejím příchodu ještě Adam nebyl vyzkoušený?
- Jaká je střední hodnota času, kdy začne zkoušení Blanky?
- Jaká je střední hodnota času, kdy bude Blanka vyzkoušená?

Normální rozdělení

5. Nechť $Z \sim N(0, 1)$. Pomocí tabulky funkce Φ ověřte pravidlo 3σ , neboli spočítejte

- (a) $P(|Z| \leq 1)$
- (b) $P(|Z| \leq 2)$
- (c) $P(|Z| \leq 3)$
- (d) Přepište, co to znamená pro n.v. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

6. Budeme modelovat množství sněhu, který bude na Silvestra v lyžarském areálu Ještěd, pomocí normálního rozdělení se střední hodnotou 40 (centimetrů) a směrodatnou odchylkou 10.

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že nám model určí zápornou hodnotu sněhové pokrývky?
- (b) Jaká je pravděpodobnost, že sněhu napadne 50–70 cm?

Práce s distribuční funkcí

7. Metrový klacek rozložíme na dva kusy – lomem v uniformně náhodném bodě. Buď X délka delší části.

- (a) Jaké je rozdělení X ?
- (b) Určete $\mathbb{E}(X)$.

8. Pro jistý problém máme k dispozici dva algoritmy, A a B. Algoritmus C spočívá v tom, že si náhodně vybereme, který z algoritmů A, B spustíme – A bude mít pravděpodobnost p , B pravděpodobnost $1 - p$. Dobu běhu A , B , C chápeme jako náhodné veličiny, označíme je X , Y , Z .

- (a) Určete F_Z pomocí F_X , F_Y .
- (b) Pokud jsou X , Y spojité, určete f_Z pomocí f_X , f_Y .

Nápovědy

- 2, 3a: použijte vzorec pro distribuční funkci exponenciálního rozdělení.
- 3bc: jaké je rozdělení $X - 1$ za předpokladu $X \geq 1$?
- 4: b: použijte příklad 3, c: věta o celkové střední hodnotě, d: linearita
- 5: Potřebujete vždy odečíst dvě vhodné hodnoty v tabulce na první stran 2.
- 6: Převedte na tvrzení o náhodné veličině $N(0, 1)$.
- 7: Spočítejte napřed distribuční funkci X , pak její hustotu.
- 8: Věta o celkové pravděpodobnosti platí i tady.

K procvičení

9. Házíme na terč – kruh o poloměru 1. Předpokládejme, že každý bod v terči má stejnou pravděpodobnost zásahu, přesněji, každá jeho podmnožina má pravděpodobnost úměrnou své ploše. Označme X vzdálenost od středu. (a) Najděte distribuční funkci F_X . (b) Najděte hustotní funkci f_X . (c) Zjistěte $\mathbb{E}(X)$, $\text{var}(X)$, σ_X .

10. $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(1, 4)$.

- (a) Najděte lineární funkci $f(t) = a \cdot t + b$, aby $f(Y)$ měla stejnou distribuci jako X .
- (b) Spočítejte $P(X \leq 1)$, $P(X > 2)$.
- (c) Spočítejte $P(Y < 0)$, $P(Y > 2)$.

11. Frantovi jsme ve skoku do dálky naměřili 9 metrů, což překonává světový rekord o 5 cm. Při měření jsme se ovšem dopustili chyby s rozdělením $N(0, 0.01)$. Jaká je pravděpodobnost, že byl rekord skutečně překonán?

12. Nechť $X \sim N(0, 1)$ a $Y = |X|$. Určete $\mathbb{E}(Y)$ a $\text{var}(Y)$.