

12. cvičení z PSt — 6.–12.5.2025

Bodové odhady

- Zkoumáme posloupnost n.n.v. se stejným rozdělením, např. $Geom(\theta)$, $U(0, \theta)$, kde θ je parametr.
- Zapisujeme $X_1, \dots, X_n \sim F_\theta$, tzv. **náhodný výběr** z F_θ (model s parametrem).
- Naměříme $X_1 = x_1, \dots$, chceme odhadnout θ .
- $\hat{\theta}_n$... nějaká metoda jak odhadnout θ pomocí naměřených dat (hodnot $X_1, \dots, X_n$), angl. *estimator*
- $m_r(\theta) = \mathbb{E}(X^r)$ pro $X \sim F_\theta$... **r -tý moment**, ideální vlastnost rozdělení
- $\hat{m}_r(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r$... **r -tý výběrový moment**, náhodná veličina, funkce našeho naměřeného vzorku (tj. statistika)
- **Odhad metodou momentů** vyřešíme rovnici $m_1(\theta) = \hat{m}_1(\theta)$ pro neznámou θ .
- event. soustavu rovnic $m_r(\theta) = \hat{m}_r(\theta)$ pro $r = 1, 2, \dots$ podle potřeby.
- $L(\theta; x_1, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1 \& \dots \& X_n = x_n)$... pravd. pozorovaných dat závislá na parametru θ .
- nebo $L(\dots) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$... hustota pravděpodobnosti ...
- $\ell(\theta; x_1, \dots, x_n) = \log L(\dots)$... pro snazší výpočty.
- **Odhad metodou maximální věrohodnosti (Maximal Likelihood)** hledáme θ , pro které je maximální $L(\theta; x_1, \dots, x_n)$, resp. $\ell(\dots)$. Obvykle pomocí derivací funkce L , resp. ℓ .
- **bias (vychýlení)**: $\mathbb{E}(\hat{\theta}_n - \theta)$... θ skutečný parametr, $\hat{\theta}_n$ náš odhad (náhodná veličina, protože závisí na naměřených datech)
- odhad je **nevychýlený/nestranný/unbiased**: $bias = 0$
- odhad je **asymptoticky nevychýlený**: bias konverguje k 0, neboli $\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) \rightarrow \theta$
- odhad je **konzistentní**: $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$: pro všechna $\varepsilon > 0$ $P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) \rightarrow 0$
- **MSE (mean square error, střední kvadratická odchylka)**: $\mathbb{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2)$
- Věta: $MSE = bias^2 + \text{var}(\hat{\theta}_n)$.

Pro praktickou ukázkou, viz pythonový notebook na webu přednášky <https://iuuk.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/PSt1/>.

1. Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim U(0, \theta)$.

- (a) Navrhněte bodový odhad θ momentovou metodou.
- (b) Navrhněte bodový odhad θ metodou maximální věrohodnosti.
- (c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.
- (d) Pro každý z nich spočítejte střední kvadratickou odchylku (MSE). (Stačí experimentálně na počítači.)
- (e) Který odhad je lepší? Napadá vás nějaký ještě lepší?

2. Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim Geom(p)$.

- (a) Navrhněte bodový odhad p momentovou metodou.
- (b) Navrhněte bodový odhad p metodou maximální věrohodnosti.
- (c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.

3. Pro náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(1/\theta)$ řešte části (a)–(c) jako výše.
- (a) Navrhněte bodový odhad θ momentovou metodou.
 - (b) Navrhněte bodový odhad θ metodou maximální věrohodnosti.
 - (c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.
4. Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$. Zajímá nás pravděpodobnost p , že $X > 1$ pro $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. (Připomeňme, že $p = e^{-\lambda \cdot 1}$.)
- (a) Navrhněte bodový odhad p (libovolnou metodou), případně několik odhadů.
 - (b) Prozkoumejte jeho vlastnosti.

Intervalové odhady

5. Máme jedno měření $X \sim N(\mu, 1)$. (Tj. parametr $\theta = \mu$.)
- (a) Najděte intervalový odhad pro μ se spolehlivostí 95 %. (Pro konkrétnost: naměřili jsme $x = 2.9$.)
 - (b) Místo jednoho měření jich provedeme n (pochopitelně nezávislých). Jaký bude teď intervalový odhad pro μ ? Pro konkrétnost: naměřili jsme $x_1, \dots, x_9 = 1.82, 1.00, 2.50, 3.00, 0.50, 2.97, 1.76, 1.35, 3.41$.
 - (c) Nechť X má stále střední hodnotu μ a rozptyl 1, ale není už nutně normální. Co se změní?

K procvičení

6. Nechť $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ popisuje dráhu, kterou uletí radioaktivní částice, nechť se rozpadne. Náš přístroj její rozpad (a polohu rozpadu, tj. hodnotu X) zachytí, ale jen pokud $1 \leq X \leq 2$. Formálně, budeme zkoumat náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim F_{X|B}$ pro jev $B = 1 \leq X \leq 2$.
- (a) Navrhněte bodový odhad λ momentovou metodou.
 - (b) Navrhněte bodový odhad λ metodou maximální věrohodnosti.
 - (c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.
7. Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n \sim \text{Pois}(\lambda)$.
- (a) Navrhněte bodový odhad λ momentovou metodou.
 - (b) Navrhněte bodový odhad λ metodou maximální věrohodnosti.
 - (c) Spočítejte střední kvadratickou odchylku (MSE).