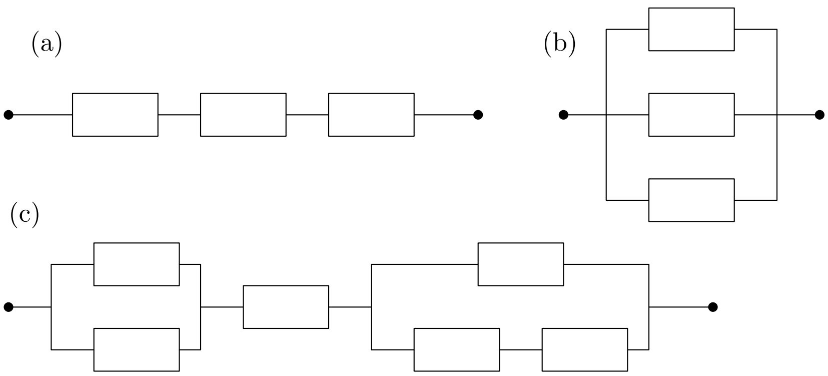
1. cvičení z PSt — 19.–23.2.2024

Na rozehřátí

1. Chceme spravedlivě rozlosovat mezi dvěma lidmi, ale máme jen cinknutou minci, kde padá orel s pravděpodobností p. Hodnotu p si nemůžete vybrat, víte jen, že $0 < p < 1$. Můžete ale házet víckrát. Jak to udělat?

2. Je pravděpodobnější, že při hodu třemi kostkami padne součet 11 nebo 12?

3. Každý obdélník na obrázku je součástka, která se může porouchat s pravděpodobností p a pak nepropouští elektrický proud. Jaká je pravděpodobnost, že stále poteče proud mezi dvěma puntíky?



4. V krabici se 100 bateriemi jsou čtyři vybité.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že když vybereme náhodně tři z nich do čelovky, tak bude fungovat? (Musí být všechny v pořádku.)

(b) Jaká je pravděpodobnost, že budou aspoň dvě ze tří v pořádku?

(c) Třikrát vytáhneme náhodnou baterii, změříme a (protože je v pořádku) tak ji hodíme zpět. S jakou pravděpodobností se to stane?

Bez počítání: je vyšší pravděpodobnost (a) nebo (c)?

Podmíněná pravděpodobnost

5. Král země má právě jednoho sourozence. Jaká je pravděpodobnost, že král má bratra? (Ujasněte si všechny předpoklady, které používáte!)

6. Král udělí milost dvěma ze tří vězňů (a vybere náhodně). Jednomu z nich dozorce nabídl, že mu řekne jméno jednoho z druhých dvou vězňů, který bude propuštěn. Vězeň ale odmítl: pak bych měl pravděpodobnost propuštění jen 1/2, teď ji mám 2/3. Má pravdu?

Bonusy

7. (Bertrandův paradox) Rovnostrannému trojúhelníku se stranou 1 opíšeme kružnici, na té vybereme náhodnou tětivu. Jaká je pravděpodobnost, že délka tětivy je větší než 1?

8. Na stole leží dvě obálky, o kterých víme, že v každé z nich je nějaký (nenulový, celočíselný) počet stokorun, v obou jiný. Máme dovoleno jednu obálku otevřít a pak se rozhodnout, zda si necháme tu, nebo tu druhou. Pokud chceme získat obálku s vyšším obnosem, můžeme ji získat s pravděpodobností větší než 1/2? (Nápověda na druhé stránce.)

9. Máme k nádob, v každé z nich a bílých a b černých míčků. Z první vybereme náhodný míček, vhodíme do druhé. Pak z ní vybereme náhodný míček, vhodíme do třetí, atd. Jaká je pravděpodobnost, že z poslední nádoby vytáhneme bílý míček?

10. V urně je a černých a b bílých míčků. Postupně z ní (bez vracení) taháme míčky. Jaká je pravděpodobnost, že první vytažený míček je černý? Druhý, třetí, ...?

Pro procvičení

11. Hodíme korunou a dvoukorunou, na každé z nich padá panna s pravděpodobností p.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne panna, pokud padla panna na koruně?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne panna, pokud padla panna aspoň na jedné minci?

Je bez počítání jasné, která pravděpodobnost je větší?

12. Hodíme dvakrát kostkou. Označíme

- SD jev „součet hozených čísel je 10“,
- PS jev „první hod padla šestka“ a
- NS jev „v některém hodu padla šestka“ (možná v obou).

Spočtěte pravděpodobnosti daných jevů a všechny podmíněné pravděpodobnosti.

13. Házíme mincí, dokud nepadne orel, na každý hod dostaneme novou minci. (Jaká je pravděpodobnost, že získáme k mincí?) Pak všechny získané mince hodíme najednou, pokud na každé z mincí padne orel, můžeme si je všechny nechat. Jaká je pravděpodobnost, že se to stane?

14. Označme Z jev „Kvído si během příštích dvanácti měsíců nastaví automatické zálohování důležitých souborů“ a D jev „Kvído během příštích dvanácti měsíců přijde o nějaký důležitý soubor“.

(a) Myslíte, že je větší $P(Z \mid D)$ nebo $P(Z \mid D^c)$?

(b) Myslíte, že je větší $P(D \mid Z)$ nebo $P(D \mid Z^c)$?

(c) Podle definice ověřte, zda váš tip je matematicky možný.

(d) Zamyslete se nad tím, proč.

Nápověda k problému s obálkami: Vytáhneme minci a házíme, dokud nepadne panna. Označíme X celkový počet hodů (včetně posledního, tj. $X \geq 1$.) Pokud v naší obálce je k stokorun, tak si obálku necháme, pokud $X < k$. Jaká je pravděpodobnost, že získáme obálku s vyšší částkou?