4. cvičení z PSt — 11.–15.3.2024

Náhodné veličiny

1. Hodíme dvěma kostkami – pro jednoduchost čtyřstěnnými, s čísly 1, …, 4. Označíme X maximum ze dvou hozených čísel. Popište, jak budete tuto situaci modelovat: co bude Ω, co přesně za matematický objekt je X, jaká je p_X.

2. Na přednášku je přihlášeno 234 lidí. Jaká je pravděpodobnost, že přesně jeden z nich má dnes narozeniny? Ignorujte přestupné roky, uvažujte, že všechny dny jsou stejně pravděpodobné pro narození.

(a) Použijte binomické rozdělení.
(b) Použijte aproximaci pomocí Poissonova rozdělení: $Bin(n, \lambda/n)$ je přibližně $Poi(\lambda)$.
(c) Co se změni, když budu uvažovat narozeniny zítra?

3. Nechť náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení, $X \sim Poi(\lambda)$. Připomeňte si vzorec pro pravděpodobnostní funkci $p_X(k)$. Ukažte, že $p_X(k)$ je rostoucí pro $k \le \lfloor \lambda \rfloor$ a pak klesá, v limitě k nule.

4. Na kroužku máme pět klíčů, jeden z nich je správný, ale my nevíme jaký. Zkoušíme otevřít dveře.

(a) Po každém pokusu se nám kroužek vysmekne, a vybíráme vždy znovu náhodně.
(b) Vybíráme v náhodném pořadí, ale každý klíč jenom jednou (můžeme si je poznačit).

V obou případech zkoumáme, kolikátým pokusem dveře otevřeme. Jaké je rozdělení této náhodné veličiny? Tj., jaká je pravděpodobnost, že dveře otevřeme k-tým pokusem.

(c) Jako část (a), ale správné jsou dva klíče z deseti.
(d) Jako část (b), ale správné jsou dva klíče z deseti.

5. Uvažme $m + n$ hodů spravedlivou kostkou. Označme X počet šestek z prvních m hodů, Y počet šestek z posledních n hodů. Jaká je distribuce X, Y a $X + Y$?

6. V pytlíku je N bonbónů, z nichž K je dobrých. Náhodně vytáhneme n z nich, označíme X počet dobrých vytažených bonbónů.

(a) Jak se jmenuje rozdělení n.v. X?
(b) Jaká je $P(X = k)$?

Nezávislé náhodné veličiny

Definice: d.n.v. X_1, X_2 jsou nezávislé, pokud jsou nezávislé jevy $\{X_1 = x_1\}$ a $\{X_2 = x_2\}$ pro každou dvojici čísel x_1, x_2.

7. Ukažte, že jevy A, B jsou nezávislé, právě když jsou nezávislé jejich indikátorové veličiny.

8. Ukažte, že pro diskrétní nezávislé n.v. X, Y platí

$$P(X \le x \,\&\, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y).$$

Pro jednoduchost můžete předpokládat, že $Im(X) = Im(Y) = \{1, 2, \dots, n\}$ pro nějaké n.

Bonus

9. (Kasino v St. Petersburgu) Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n-tém hodu, dostaneme odměnu 2^n peněz. Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?

10. * Roztržitý matematik má v každé kapse krabičku s n zápalkami. Pokaždé, když potřebuje zápalku, tak ji vezme z náhodné kapsy. Když takhle najde prázdnou krabičku, označme X počet zápalek v druhé krabičce. Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X.

K procvičení

11. Na koš nezávisle hází n hráčů basketbalu. Při každém hodu má každý z nich pravděpodobnost p, že se trefí, nezávisle na ostatních. Označme X_i pořadí hodu, kterým se i-tý hráč poprvé trefí. Označme dále $X = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

(a) Jaká je distribuce X_1, X_2, …?

(b) Jaká je distribuce X?

12. Označme X počet meteorů, které uvidíte během hodinového pozorování noční oblohy. Jaké rozdělení použijete pro popis X?