3. cvičení z PSt — 4.–8.3.2024

Nezávislé jevy

Buď I libovolná množina indexů. Jevy $\{A_i : i \in I\}$ nazveme *nezávislé (independent)*, pokud pro každou konečnou množinu $J \subseteq I$

$$P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Pokud podmínka platí jen pro dvouprvkové množiny J, nazýváme jevy $\{A_i : i \in I\}$ *po dvou nezávislé (pairwise independent)*.

1. Dva hody mincí modelujeme uniformním prostorem $\Omega = \{PP, PO, OP, OO\}$. Ověřte, že jev A_1 „první hod byla panna“ a A_2 „druhý hod byla panna“ jsou nezávislé podle definice výše.

2. (pokračování) Tentokrát máme zadané $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, a chceme, aby A_1 a A_2 byly nezávislé. Ověřte, že tím je určena pravděpodobnost každého jevu.

3. Pokud jsou jevy A, B nezávislé, tak jsou nezávislé i jevy A, B^c. A také jevy A^c, B^c. (Připomenutí: $A^c = \Omega \setminus A$.)

4. (a) Mohou být jevy A, B nezávislé a zároveň disjunktní?
(b) Mohou být jevy A, B nezávislé a zároveň $A \subseteq B$?

5. Najděte jevy A, B, C (na libovolném pravděpodobnostním prostoru), které
(a) jsou nezávislé.
(b) nejsou po dvou nezávislé, ale $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
(c) jsou po dvou nezávislé, ale $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$.

6. * Najdete náhodné jevy A, B, C takové, že

- A, B jsou nezávislé za podmínky C, tj.
$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)P(B \mid C),$$
- A, B jsou nezávislé za podmínky C^c,
- ale A, B nejsou nezávislé?

Přípravka na náhodné veličiny

7. Prokop hází basketbalovým míčem na koš, v každém pokusu má pravděpodobnost zásahu $p = 1/10$, pokusy jsou nezávislé. Skončí po prvním zásahu. Označme X celkový počet hodů.
(a) Jaká je $P(X > k)$? (Zkuste napřed pro $k = 1$, $k = 2$.)
(b) Jaká je $P(X = k)$? (Určení těchto čísel se nazývá popis distribuce X.)
(c) Jaká je $P(X \geq 10 \mid X \geq 5)$?

8. Pokračování z minulé úlohy: označme $Y = X \bmod 2$, tj. $Y = 0$, pokud je X sudé, jinak $Y = 1$. Určete distribuci Y.

9. Quido také hází míčem na koš, má pravděpodobnost p, že se trefí a také jsou hody nezávislé. Označme Z počet zásahů z n pokusů. Určete distribuci Z (tj. $P(Z = k)$ pro všechna k).

Bonus

10. Pokud vidíme bílého pudla, zvyšuje to naši důvěru, že je každá vrána černá?

11. (Kasino v St. Petersburgu) Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n-tém hodu, dostaneme odměnu 2^n. Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?

K procvičení

12. V truhle je sto mincí. Z nich 99 je normálních, ale jedna má na obou stranách orla. Vytáhneme náhodnou minci a šestkrát s ní hodíme, pokaždé padne orel. Jaká je pravděpodobnost, že jsme si vytáhli „dvouorlovou" minci? (Zkuste napřed odhadnout, pak spočítat.)

13. Na chorobu C máme dva testy, A a B. Test A má sensitivitu i specificitu $p = 0.95$. Test B vždy řekne, že pacient je zdravý. Předpokládejte, že $P(C) = 0.01$.

(a) Spočtěte pro oba testy pravděpodobnost úspěchu (tj. správné odpovědi), použijeme-li je na náhodného pacienta. Rozmyslete si, co to říká o užitečnosti obou testů.

(b) Pro jaké p je pravděpodobnost úspěchu obou testů stejná?

14. Ve volbách hlasují lidé pro dva kandidáty, A a B. Při odchodu z volební místnosti jsou voliči náhodně požádáni o účast v exit-poll. Předpokládejme, že kdo odpoví, odpoví popravdě koho volil, ale ne všichni se zúčastní. Označíme-li E množinu voličů, kteří se exit-pollu zúčastní, tak předpokládejme $P(E \mid A) = 0.7$ a $P(E \mid A^c) = 0.4$. Výsledky exit-pollu jsou 60 % pro A. Jaký je skutečný podíl lidí, kteří hlasovali pro A?

15. Kouřovými signály přenášíme binární soubor. Je proto poměrně vysoká pravděpodobnost chyby u každého bitu: 0 se jako 0 přenese jen s pravděpodobností 0.9, 1 jako 1 jen s pravděpodobností 0.8. Předpokládejme (trochu neseriózně), že jednotlivé znaky se přenáší nezávisle. Dále předpokládejme, že ve vysílané zprávě je stejně nul a jedniček.

(a) Pokud jsme dostali signál 0, jaká je pravděpodobnost, že byl opravdu vyslán?

(b) Dostali jsme zprávu 0010. Jaká je pravděpodobnost, že byla opravdu vyslána?

(c) Jak se výpočet změní, pokud budeme pro kontrolu vysílat každý symbol třikrát (a pak vezmeme častější z těch tří pokusů)?