

Samoopravné kódy

Příklad 1. (a), (b) snadné. Pro (c) označme $D_{xy} = \{i : x_i \neq y_i\}$. Potom platí $D_{xz} = D_{xy} \Delta D_{yz}$, kde Δ značí symmetrický rozdíl. Jistě tedy $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, neboť $d(x, y) = |D_{xy}|$.

Příklad 2. Mějme $y \in S_n$ a dvě různá kódová slova $x, x' \in C$ taková, že $d(x, y) \leq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ a $d(x', y) \leq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$. Z trojúhelníkové nerovnosti dostáváme $d(x, x') \leq d(x, y) + d(x', y) \leq 2\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor < d$, což je spor.

Příklad 3. Kód C_1 opraví jednu chybu a detekuje dvě chyby. Kód C_2 neopraví, ani nedetekuje žádnou chybu. Kód C_3 neopraví žádnou chybu, ale detekuje jednu.

Příklad 4. Sčítáme přes množiny vektorů ve vzdálenosti $0 \leq i \leq r$. Těch je $\binom{n}{i}$, neboť musíme překlomit právě i bitů z n . Dostaneme

$$|B_n(x, r)| = \sum_{i=0}^r \binom{n}{i}.$$

Všimněte si, že objem nezáleží na středu x .

Příklad 5. Část (a) jsme vyřešili na 5. cvičení, příklad 1(c). Pro část (b) použijeme Hammingův odhad a výsledek z předchozí úlohy. Dostáváme

$$A(7, 3) \leq \frac{2^7}{1+7} = 16.$$

Příklad 6. Kód C_1 je lineární, generující matice je $G_1 = (1 \ 1 \ 1)$, a kontrolní matice je například $H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Kód C_1 není lineární, např. chybí vektor 000. Kód C_3 je lineární a dokonce platí $C_3 = C_1^\perp$. Má tedy generující matici H_1 a kontrolní matici G_1 .

Příklad 7. $C = \{0000, 0110, 1101, 1011\}$, kontrolní matice je například $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 8. Získaný kód má parametry n', k', d' , kde

- (a) $n' = n_1 + n_2$, $k' = k$, $d' \geq d_1 + d_2$.
- (b) $n' = n_1 + n_2$, $k' = 2k$, $d' \geq \min d_1, d_2$.

Příklad 9. (b) $C = \{0000, 1100, 0011, 1111\}$.

(c) Použijeme Hammingův odhad

$$A(4, 3) \leq \frac{2^4}{1+4} < 2^2.$$