

Dirichletův princip**Příklad 1.** $12 \times 2 + 1$ **Příklad 2.** Označme jako x_i počet hraček v i -té krabici. Pro spor: necht' jsou x_i po dvou různé. Potom platí

$$20 = x_1 + x_2 + \cdots + x_7 \geq 0 + 1 + \cdots + 6 = 21,$$

což je spor.

Příklad 3. (a) Platí pro každých $3 \times 9 + 1$ políček.

- (b) Platí pro každou tabulku o 4 sloupcích a $(3^4 + 1)$ řádcích. Jelikož je pouze 3^4 způsobů jak obarvit sloupec, vyskytnou se dva sloupce stejné barvy. Ty ale obsahují jednu barvu na alespoň dvou řádcích. Tyto políčka z obou sloupců pak tvoří hledaný jednobarevný čtverec.
- (c) Stejná idea jako výše. Stačí tabulka se $3 \times 9 + 1 = 28$ řádky a $9 \times 3^{28} + 1$ sloupci. Potom najdeme deset sloupců se stejným vzorcem, přičemž jedna barva se v něm vyskytne alespoň desetkrát.

Ramseyova věta**Příklad 5.** Mějme posloupnost $a_1, \dots, a_N$. Postavíme úplný graf na N vrcholech a hranu ij , kde $i < j$, obarvíme červenou barvou pokud $a_i \leq a_j$ a modrou barvou pokud $a_i > a_j$. Pokud $N \geq R(k, \ell)$, potom graf obsahuje buď červený K_k nebo modrý K_ℓ . V prvním případě indexy daného grafu určují neklesající podposloupnost délky k , v druhém případě klesající (speciálně tedy nerostoucí) podposloupnost délky ℓ .**Příklad 6.** (a) Ano.

- (b) Ano. Najdeme jednobarevný K_{20} a ten obsahuje $K_{10,10}$ jako podgraf.
- (c) Ne. Obarvíme hrany sousedící s vrcholem 1 modrou barvou, zbylé hrany červenou.
- (d) Ano. Zaměříme se podgraf indukovaný vrcholy, které jsou mocniny dvojky. Pokud $N \geq 2^{R(10,10)}$, tak nám zbude alespoň $R(10, 10)$ vrcholů a tvrzení plyne z Ramseyovy věty.
- (e) Ne. Obarvíme všechny hrany modře a smyčky červeně.