

Dirichletův princip

Připomenutí: Kdykoliv rozmístíme n kuliček do k krabic, bude v jedné krabici aspoň $\lceil n/k \rceil$ kuliček.

Příklad 1 (Narozeniny). Jak velká musí být skupina lidí, aby v ní zaručeně existovali 3 lidé, kteří slaví narozeniny ve stejném měsíci?

Příklad 2 (Hračky). Ema uklidila svých 20 hraček do 7 krabic. Dokažte, že v některých dvou krabicích je stejný počet hraček.

Příklad 3 (Tabulka). Políčka nekonečné tabulky obarvujeme 3 barvami. Dokažte, že

- (a) V libovolném řádku existuje deset políček, která mají všechna stejnou barvu.
- (b) Existují dva řádky a dva sloupce takové, že 4 políčka v jejich průsečících mají stejnou barvu.
- (c) Existuje 10 řádků a 10 sloupců takových, že 100 políček v jejich průsečících má stejnou barvu.

Příklad 4 (Rostoucí sled). Je dán graf s n vrcholy a m hranami. Každá hrana má jinou váhu. Dokažte, že existuje tah skrz $\lceil 2m/n \rceil$ hran, ve kterém váhy postupně rostou.

Ramseyovy věty

Připomenutí: Barvíme hrany úplného grafu K_N pomocí k barev a hledáme jednobarevné kliky.

Pro $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ definujeme *Ramseyovo číslo* $R_2(n_1, \dots, n_k)$ jako nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé obarvení hran úplného grafu K_N pomocí k barev existuje barva $i \in [k]$ taková, že dané obarvení obsahuje K_{n_i} jako podgraf se všemi hranami obarvenými i -tou barvou.

Věta (Ramseyova). Pro každé $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ je číslo $R_2(n_1, \dots, n_k)$ konečné.

Z přednášky víme $R_2(3, 3) = 6$ a obecně $2^{k/2} \leq R_2(k, k) \leq \binom{2k-2}{k-1} < 4^k$.

Příklad 5. Dokažte, že každé $k, \ell \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že každá posloupnost N čísel obsahuje neklesající podposloupnost délky k nebo nerostoucí podposloupnost délky ℓ .

Příklad 6 (Ramsey?). Pro $N \in \mathbb{N}$ označme K_N úplný graf na vrcholech $V = \{1, 2, \dots, N\}$. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

- (a) Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný úplný podgraf na 10 vrcholech.
- (b) Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný podgraf $K_{10,10}$ na 20 vrcholech.
- (c) Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný úplný podgraf na 10 vrcholech, který obsahuje vrchol číslo 1.
- (d) Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný úplný podgraf na 10 vrcholech, jehož každý vrchol je mocnina dvojky.
- (e) Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N a smyčky dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný úplný podgraf na 10 vrcholech (i se smyčkami).

Příklad 7 (IMO 1964, P4). Dokažte, že $R_2(3, 3, 3) \leq 17$.

Příklad 8 (IMO shortlist 1987). Dokažte, že čísla $\{1, 2, \dots, 1987\}$ lze obarvit čtyřmi barvami tak, že každá aritmetická posloupnost délky 10 bude obsahovat členy více než jedné barvy.

Příklad 9 (Bipartitní Ramsey). Dokažte, že pro každé $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé obarvení hran úplného bipartitního grafu $K_{N,N}$ pomocí k barev existuje barva $i \in [k]$ taková, že dané obarvení obsahuje K_{n_i, n_i} jako podgraf se všemi hranami obarvenými i -tou barvou.

Dirichletův princip

Připomenutí: Kdykoliv rozmístíme n kuliček do k krabic, bude v jedné krabici aspoň $\lceil n/k \rceil$ kuliček.

Příklad 1 (Narozeniny). Jak velká musí být skupina lidí, aby v ní zaručeně existovali 3 lidé, kteří slaví narozeniny ve stejném měsíci?

Příklad 2 (Hračky). Ema uklidila svých 20 hraček do 7 krabic. Dokažte, že v některých dvou krabicích je stejný počet hraček.

Příklad 3 (Tabulka). Políčka nekonečné tabulky obarvujeme 3 barvami. Dokažte, že

- (a) V libovolném řádku existuje deset políček, která mají všechna stejnou barvu.
- (b) Existují dva řádky a dva sloupce takové, že 4 políčka v jejich průsečících mají stejnou barvu.
- (c) Existuje 10 řádků a 10 sloupců takových, že 100 políček v jejich průsečících má stejnou barvu.

Příklad 4 (Rostoucí sled). Je dán graf s n vrcholy a m hranami. Každá hrana má jinou váhu. Dokažte, že existuje tah skrz $\lceil 2m/n \rceil$ hran, ve kterém váhy postupně rostou.

Ramseyovy věty

Připomenutí: Barvíme hrany úplného grafu K_N pomocí k barev a hledáme jednobarevné kliky.

Pro $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ definujeme *Ramseyovo číslo* $R_2(n_1, \dots, n_k)$ jako nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé obarvení hran úplného grafu K_N pomocí k barev existuje barva $i \in [k]$ taková, že dané obarvení obsahuje K_{n_i} jako podgraf se všemi hranami obarvenými i -tou barvou.

Věta (Ramseyova). Pro každé $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ je číslo $R_2(n_1, \dots, n_k)$ konečné.

Z přednášky víme $R_2(3, 3) = 6$ a obecně $2^{k/2} \leq R_2(k, k) \leq \binom{2k-2}{k-1} < 4^k$.

Příklad 5. Dokažte, že každé $k, \ell \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že každá posloupnost N čísel obsahuje neklesající podposloupnost délky k nebo nerostoucí podposloupnost délky ℓ .

Příklad 6 (Ramsey?). Pro $N \in \mathbb{N}$ označme K_N úplný graf na vrcholech $V = \{1, 2, \dots, N\}$. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

- (a) Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný úplný podgraf na 10 vrcholech.
- (b) Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný podgraf $K_{10,10}$ na 20 vrcholech.
- (c) Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný úplný podgraf na 10 vrcholech, který obsahuje vrchol číslo 1.
- (d) Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný úplný podgraf na 10 vrcholech, jehož každý vrchol je mocnina dvojky.
- (e) Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N a smyčky dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný úplný podgraf na 10 vrcholech (i se smyčkami).

Příklad 7 (IMO 1964, P4). Dokažte, že $R_2(3, 3, 3) \leq 17$.

Příklad 8 (IMO shortlist 1987). Dokažte, že čísla $\{1, 2, \dots, 1987\}$ lze obarvit čtyřmi barvami tak, že každá aritmetická posloupnost délky 10 bude obsahovat členy více než jedné barvy.

Příklad 9 (Bipartitní Ramsey). Dokažte, že pro každé $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé obarvení hran úplného bipartitního grafu $K_{N,N}$ pomocí k barev existuje barva $i \in [k]$ taková, že dané obarvení obsahuje K_{n_i, n_i} jako podgraf se všemi hranami obarvenými i -tou barvou.