

Počítání dvěma způsoby

Příklad 1. Celý obrázek budeme považovat za rovinné nakreslení grafu $G' = (V', E')$ se stěnami F' . Z Eulerovy formule máme

$$|E'| = |V'| + |F'| - 2,$$

tedy

$$E + 4 = n + 4 + T + 1 - 2.$$

Dvěma způsoby spočítáme incidence mezi hranami E' a stěnami F' . Dostáváme:

$$2|E'| = 3T + 4,$$

tedy

$$2(E + 4) = 3T + 4.$$

Zbývá dopočítat vzniklou soustavu dvou rovnic s neznámými E a T .

Příklad 2. Součty přes sloupce jsou $10 \cdot S$. Součty přes řádky jsou něco mezi 45 a 55 v závislosti na tom, která z hodnot $0, 1, \dots, 10$ se mezi součty řádků nevyskytuje. Z těchto možností je ale jen jediná dělitelná 10. Dostáváme tedy $S = 5$.

Příklad 3. Spočítáme incidence mezi službami (trojice) a dvojicemi účastníků. Každá z $D = \binom{15}{2}$ dvojic se vyskytne v právě jedné službě a každá služba obsahuje právě 3 dvojice. Označíme-li jako S počet služeb (tj. počet dní tábora), dostáváme

$$3S = D,$$

tedy $S = 35$.

Příklad 4. Spočítáme „třešnický“ v grafu. Třešnička je graf s vrcholy v, x, y a hranami vx, vy . Pro každou volbu v máme $\binom{5}{2}$ způsobů jak jej doplnit na třešničku (z regularity). Pokud by cyklus C_4 v grafu nebyl, lze každou dvojici různých vrcholů x, y doplnit na třešničku nejvýše jedním způsobem (jinak bychom měli C_4). Platilo by tedy

$$20 \binom{5}{2} = \# \text{ třešniček} \leq \binom{20}{2}.$$

To je ovšem spor, neboť $200 > 190$.

Příklad 5. Ekvivalentně: chceme ukázat, že G nemá most. Pro spor předpokládejme, že hrana e je most v G . Po odebrání e se G rozpadne na dvě disjunktní komponenty G_1 a G_2 . Spočítáme stupně v G_1 . Platí

$$2|E(G_1)| = \sum_{v \in V(G_1)} \deg_{G_1}(v) = 4(|V(G_1)| - 1) + 3,$$

kde první nerovnost počítá stupně přes hrany G_1 , zatímco druhá je počítá přímo (všimněme si, že právě jeden vrchol G_1 sousedil s mostem, a má tedy stupeň 3). To je ovšem spor, neboť levá strana je sudá, zatímco pravá je lichá.

Alternativně: G je souvislý a má všechny stupně sudé, obsahuje tedy (uzavřený) Eulerovský tah T . Pro připomenutí: to je tah (sled bez opakování hran), který prochází všechny hrany právě jednou a začíná ve stejném vrcholu, ve kterém začal. Jistě tedy po odebrání libovolné hrany e zůstane graf souvislý, neboť se mezi každými dvěma vrcholy lze dostat po $T \setminus e$.