

Počítání dvěma způsoby

Připomenutí: Pokud dvěma způsoby počítáme to samé, musí vyjít v obou případech to samé.

Příklad 1 (Triangulace). Ve čtverci je n bodů v obecné poloze. Spojujeme body úsečkami, dokud čtverec nerozkrájíme na trojúhelníky. Pak počet trojúhelníku je vždy $T = 2n + 2$ a počet úseček je vždy $E = 3n + 1$.

Příklad 2 (Součty). Tabulka 10×10 je vyplněna jedničkami a nulami tak, že součty v každých dvou řádcích jsou různé a součty ve všech sloupcích jsou stejné. Čemu jsou rovné součty ve sloupcích?

Příklad 3 (Steinerův tábor). Na táboře je 15 dětí. Každý den mají tři děti službu v kuchyni. Platí, že každá dvojice dětí má právě jednu společnou službu. Kolik dní trvá tábor?

Příklad 4 (Čtyřcyklus). Dokažte, že 5-regulární graf na 20 vrcholech obsahuje čtyřcyklus C_4 .

Příklad 5 (Nigdy Most!). Je dán souvislý 4-regulární graf G . Dokažte, že $k_e(G) \geq 2$.

Příklad 6 (Písemka). Dvacet studentů psalo písemku, která měla čtyři úlohy. Pro každou dvojici studentů bychom v písemce našli úlohu, kterou oba vyřešili správně. Dokažte, že některou z úloh správně vyřešila více než polovina studentů.

Příklad 7 (Pravoúhelníky). Do každého políčka tabulky $n \times n$ napíšeme, kolik pravoúhelníků (obdélníků a čtverců) v tabulce ho obsahuje (například do rohového políčka tabulky 3×3 takto napíšeme 9). Dokažte, že součet všech n^2 čísel v tabulce je druhá mocnina celého čísla.

Příklad 8 (Oslava). Na oslavě zná každý (včetně Adama) 3 kluky a 4 holky (“znání se” je vzájemné). Kolik nejméně tam může být lidí?

Příklad 9 (Turnaj). V šachovém turnaji n hráčů hrál každý s každým (jednou, bez remíz). Pro hráče $i = 1, 2, \dots, n$ označíme w_i a l_i počet jeho vítězství a proher.

- (a) Dokažte, že $\sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n l_i$.
- (b) Dokažte, že $\sum_{i=1}^n w_i^2 = \sum_{i=1}^n l_i^2$.

Příklad 10 (Erdős-Ko-Rado). Ať $n \geq 2r$ jsou přirozená čísla. Z množiny $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ vybíráme r -prvkové podmnožiny tak, aby měly každé dvě z nich neprázdný průnik. Dokažte, že jich můžeme vybrat nejvýše $\binom{n-1}{r-1}$.

Kostry

Připomenutí: *Kostra* (spanning tree) v grafu $G = (V, E)$ je strom $T = (V, E')$ splňující $E' \subseteq E$. Graf má kostru, když je souvislý. Pro graf G označme $t(G)$ počet jeho koster.

Věta (Cayley). Pro každé $n \geq 2$ platí $t(K_n) = n^{n-2}$.

Příklad 11 (Kostry). Spočítejte počet koster následujících grafů:

- (a) C_n , tedy cyklus na n vrcholech.
- (b) $C_m \oplus_e C_n$, tedy dva cykly slepené společnou hranou e ,
- (c) $K_n - e$, tedy graf K_n bez jedné hrany e .
- (d) $K_n \div e$, tedy graf K_n s jednou hranou e podrozdělenou extra vrcholem.
- (e) (Bonus) $K_{a,b}$, tedy úplný bipartitní graf.

Počítání dvěma způsoby

Připomenutí: Pokud dvěma způsoby počítáme to samé, musí vyjít v obou případech to samé.

Příklad 1 (Triangulace). Ve čtverci je n bodů v obecné poloze. Spojujeme body úsečkami, dokud čtverec nerozkrájíme na trojúhelníky. Pak počet trojúhelníku je vždy $T = 2n + 2$ a počet úseček je vždy $E = 3n + 1$.

Příklad 2 (Součty). Tabulka 10×10 je vyplněna jedničkami a nulami tak, že součty v každých dvou řádcích jsou různé a součty ve všech sloupcích jsou stejné. Čemu jsou rovné součty ve sloupcích?

Příklad 3 (Steinerův tábor). Na táboře je 15 dětí. Každý den mají tři děti službu v kuchyni. Platí, že každá dvojice dětí má právě jednu společnou službu. Kolik dní trvá tábor?

Příklad 4 (Čtyřcyklus). Dokažte, že 5-regulární graf na 20 vrcholech obsahuje čtyřcyklus C_4 .

Příklad 5 (Nigdy Most!). Je dán souvislý 4-regulární graf G . Dokažte, že $k_e(G) \geq 2$.

Příklad 6 (Písemka). Dvacet studentů psalo písemku, která měla čtyři úlohy. Pro každou dvojici studentů bychom v písemce našli úlohu, kterou oba vyřešili správně. Dokažte, že některou z úloh správně vyřešila více než polovina studentů.

Příklad 7 (Pravoúhelníky). Do každého políčka tabulky $n \times n$ napíšeme, kolik pravoúhelníků (obdélníků a čtverců) v tabulce ho obsahuje (například do rohového políčka tabulky 3×3 takto napíšeme 9). Dokažte, že součet všech n^2 čísel v tabulce je druhá mocnina celého čísla.

Příklad 8 (Oslava). Na oslavě zná každý (včetně Adama) 3 kluky a 4 holky (“znání se” je vzájemné). Kolik nejméně tam může být lidí?

Příklad 9 (Turnaj). V šachovém turnaji n hráčů hrál každý s každým (jednou, bez remíz). Pro hráče $i = 1, 2, \dots, n$ označíme w_i a l_i počet jeho vítězství a proher.

- (a) Dokažte, že $\sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n l_i$.
- (b) Dokažte, že $\sum_{i=1}^n w_i^2 = \sum_{i=1}^n l_i^2$.

Příklad 10 (Erdős-Ko-Rado). Ať $n \geq 2r$ jsou přirozená čísla. Z množiny $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ vybíráme r -prvkové podmnožiny tak, aby měly každé dvě z nich neprázdný průnik. Dokažte, že jich můžeme vybrat nejvýše $\binom{n-1}{r-1}$.

Kostry

Připomenutí: *Kostra* (spanning tree) v grafu $G = (V, E)$ je strom $T = (V, E')$ splňující $E' \subseteq E$. Graf má kostru, když je souvislý. Pro graf G označme $t(G)$ počet jeho koster.

Věta (Cayley). Pro každé $n \geq 2$ platí $t(K_n) = n^{n-2}$.

Příklad 11 (Kostry). Spočítejte počet koster následujících grafů:

- (a) C_n , tedy cyklus na n vrcholech.
- (b) $C_m \oplus_e C_n$, tedy dva cykly slepené společnou hranou e ,
- (c) $K_n - e$, tedy graf K_n bez jedné hrany e .
- (d) $K_n \div e$, tedy graf K_n s jednou hranou e podrozdělenou extra vrcholem.
- (e) (Bonus) $K_{a,b}$, tedy úplný bipartitní graf.