

Hranová a vrcholová souvislost

Připomenutí: Ať $G = (V, E)$ je graf s $n \geq 2$ vrcholy. *Hranový řez* v G je množina hran $F \subseteq E$ taková, že graf $(V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Hranová souvislost* $k_e(G)$ grafu G je velikost nejmenšího hranového řezu v G .

Podobně *vrcholový řez* v G je množina vrcholů $A \subseteq V$ taková, že graf $(V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2})$ je nesouvislý. *Vrcholová souvislost* $k_v(G)$ grafu G definujeme jako $n - 1$, je-li G úplný graf K_n , a jako velikost nejmenšího vrcholového řezu v G jinak.

Řekneme, že graf G je *hranově t -souvislý* pro $t \in \mathbb{N}_0$, pokud platí $k_e(G) \geq t$ a *vrcholově t -souvislý*, pokud platí $k_v(G) \geq t$.

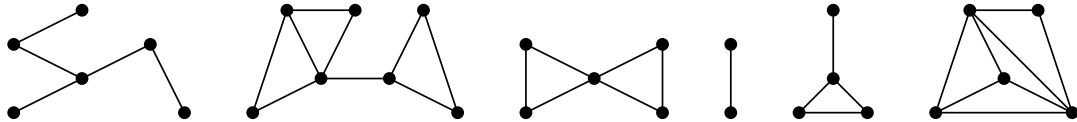
Lemma (Vztah vrcholové a hranové souvislosti). Pro každý graf G platí $k_v(G) \leq k_e(G)$.

Lemma (O uších). Graf s $n \geq 3$ vrcholy je vrcholově 2-souvislý, když jde dostat z cyklu lepením uší.

Věta (Mengerovy věty). Pro každý graf G na $n \geq 2$ vrcholech a přirozené $t \in \mathbb{N}$ platí

- $k_e(G) \geq t$, když mezi každými dvěma různými vrcholy existuje aspoň t hranově disjunktních cest.
- $k_v(G) \geq t$, když mezi každými dvěma různými vrcholy existuje aspoň t vrcholově disjunktních cest.

Příklad 1. Určete hranovou a vrcholovou souvislost následujících šesti souvislých grafů.



Příklad 2. Pro každé $k \geq 1$ najděte graf, který má vrcholovou souvislost 1 a hranovou souvislost k .

Příklad 3. Najděte příklad grafu G a vrcholu v takového, že odebráním v z G :

- klesne hranová souvislost G o 10.
- vzroste hranová souvislost G o 10.
- vzroste vrcholová souvislost G o 10.
- Bonus: O kolik nejvíce může klesnout vrcholová souvislost odebráním jednoho vrcholu?

Příklad 4. Graf G je vrcholově k -souvislý právě tehdy, když pro každý jeho vrchol v a množinu $A \subseteq \binom{V(G) - \{v\}}{k}$ existuje k cest mezi v a vrcholy množiny A , které jsou vrcholově disjunktní až na vrchol v .

Příklad 5. Dokažte, že každý vrcholově k -souvislý graf na aspoň $2k$ vrcholech obsahuje cyklus délky aspoň $2k$.

Příklad 6. Řekneme, že orientovaný graf je *silně souvislý*, pokud se z každého vrcholu jde dostat do každého jiného po orientované cestě.

- Dokažte, že pokud je G vrcholově 2-souvislý, tak má orientaci hran, která dá silně souvislý graf.
- Dokažte, že opačná implikace neplatí.

Příklad 7. Buď G *kriticky 2-souvislý graf*, to znamená, že je vrcholově 2-souvislý, ale žádný z grafů $G - e$ pro libovolné $e \in E(G)$ není vrcholově 2-souvislý.

- Dokažte, že alespoň jeden vrchol G má stupeň 2.
- Pro každé $n \geq 2$ uveďte příklad kriticky 2-souvislého grafu s vrcholem stupně alespoň n .

Příklad 8. Necht G je libovolný graf na $2n$ vrcholech, jehož každý vrchol má stupeň alespoň n . Dokažte, že G je hranově n -souvislý.

Hranová a vrcholová souvislost

Připomenutí: Ať $G = (V, E)$ je graf s $n \geq 2$ vrcholy. *Hranový řez* v G je množina hran $F \subseteq E$ taková, že graf $(V, E \setminus F)$ je nespojitý. *Hranová souvislost* $k_e(G)$ grafu G je velikost nejmenšího hranového řezu v G .

Podobně *vrcholový řez* v G je množina vrcholů $A \subseteq V$ taková, že graf $(V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2})$ je nespojitý. *Vrcholová souvislost* $k_v(G)$ grafu G definujeme jako $n - 1$, je-li G úplný graf K_n , a jako velikost nejmenšího vrcholového řezu v G jinak.

Řekneme, že graf G je *hranově t -souvislý* pro $t \in \mathbb{N}_0$, pokud platí $k_e(G) \geq t$ a *vrcholově t -souvislý*, pokud platí $k_v(G) \geq t$.

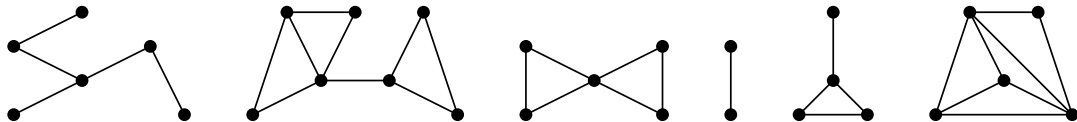
Lemma (Vztah vrcholové a hranové souvislosti). Pro každý graf G platí $k_v(G) \leq k_e(G)$.

Lemma (O uších). Graf s $n \geq 3$ vrcholy je vrcholově 2-souvislý, když jde dostat z cyklu lepením uší.

Věta (Mengerovy věty). Pro každý graf G na $n \geq 2$ vrcholech a přirozené $t \in \mathbb{N}$ platí

- $k_e(G) \geq t$, když mezi každými dvěma různými vrcholy existuje aspoň t hranově disjunktních cest.
- $k_v(G) \geq t$, když mezi každými dvěma různými vrcholy existuje aspoň t vrcholově disjunktních cest.

Příklad 1. Určete hranovou a vrcholovou souvislost následujících šesti souvislých grafů.



Příklad 2. Pro každé $k \geq 1$ najděte graf, který má vrcholovou souvislost 1 a hranovou souvislost k .

Příklad 3. Najděte příklad grafu G a vrcholu v takového, že odebráním v z G :

- klesne hranová souvislost G o 10.
- vzroste hranová souvislost G o 10.
- vzroste vrcholová souvislost G o 10.
- Bonus: O kolik nejvíce může klesnout vrcholová souvislost odebráním jednoho vrcholu?

Příklad 4. Graf G je vrcholově k -souvislý právě tehdy, když pro každý jeho vrchol v a množinu $A \subseteq \binom{V(G) - \{v\}}{k}$ existuje k cest mezi v a vrcholy množiny A , které jsou vrcholově disjunktní až na vrchol v .

Příklad 5. Dokažte, že každý vrcholově k -souvislý graf na aspoň $2k$ vrcholech obsahuje cyklus délky aspoň $2k$.

Příklad 6. Řekneme, že orientovaný graf je *silně souvislý*, pokud se z každého vrcholu jde dostat do každého jiného po orientované cestě.

- Dokažte, že pokud je G vrcholově 2-souvislý, tak má orientaci hran, která dá silně souvislý graf.
- Dokažte, že opačná implikace neplatí.

Příklad 7. Buď G *kriticky 2-souvislý graf*, to znamená, že je vrcholově 2-souvislý, ale žádný z grafů $G - e$ pro libovolné $e \in E(G)$ není vrcholově 2-souvislý.

- Dokažte, že alespoň jeden vrchol G má stupeň 2.
- Pro každé $n \geq 2$ uveďte příklad kriticky 2-souvislého grafu s vrcholem stupně alespoň n .

Příklad 8. Necht G je libovolný graf na $2n$ vrcholech, jehož každý vrchol má stupeň alespoň n . Dokažte, že G je hranově n -souvislý.