

Hallova věta

Příklad 1. Množinový systém $\Leftrightarrow$ Incidenční graf

Příklad 2. (a) Pro množiny $(\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\})$ (v tomto pořadí) lze volit reprezentanty a, b, c, d .

(b) Máme 10 množin a jen 5 možných reprezentantů. Tedy Hallova podmínka není splněna pro $J = I$.

(c) Vezměme nějakých 6 podmnožin $\{a, b, c, d, e\}$ z přechází části.

Příklad 3. Chceme najít 8 věží, z nichž žádné dvě nesdílí řádek ani sloupec. Ty pak permutaci snadno umístíme na diagonalu.

Sestavíme bipartitní graf s partitami reprezentujícími řádky a sloupce. Mezi řádek R a sloupec S dáme hranu, pokud polí určeném řádkem R a sloupcem S leží věž. Výsledný graf je 3-regulární a tedy obsahuje perfektní párování (viz přednáška / předchozí cvičení). Hrany tohoto párování předně odpovídají hledaným věžím.

Příklad 4. Postupujeme podobně jako v předchozím, hledáme perfektní párování mezi hromádkami a druhy karet, které určí ze které hromádky vzít který druh. Příslušnost jednotlivých karet (hrany grafy) k druhům a hromádkám je zde vhodné reprezentovat jako multigraf. Hallovu podmínku ověříme počítáním hran mezi množinou vrcholů a sousedstvím (rozšíření věty z přenášky na regulární multigrafy).

Příklad 5. Modifikujeme G , aby v něm Hallova podmínka platila. Do partity B přidáme vrchol x sousedící s každým vrcholem v A . V tomto grafu najdeme párování nasycující partitu A . Jeho restrikce na původní graf G (odebrání případné hrany vedoucí do x) je hledané párování velikosti alespoň $|A| - 1$.

Příklad 6. Mějme disjunktí partity $A = \{1, 2, 3, \dots\} \cup \{\omega\}$, $B = \{1, 2, 3, \dots\}$. Hrany položíme vždy mezi čísla n a n (tj. graf bez vrcholu ω je párování) a dále mezi ω a každý vrchol B .