Úloha 1. Mějme souvislý graf G, který obsahuje vrchol stupně k. Dokažte, že G obsahuje množinu A vrcholů $v_1, \ldots, v_k$ takových, že po odstranění libovolné podmnožiny $B \subseteq A$ z G zachová souvislost grafu. [4 body]

Úloha 2. Nechť T je strom s n vrcholy, $n \geq 2$. Jako p_i označíme počet vrcholů T stupně $i \in \mathbb{N}$. Dokažte, že

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - \ldots - (n-3)p_{n-1} = 2.$$

[4 body]

Úloha 3. Najděte nějaký souvislý rovinný graf G, jehož všechny vrcholy mají stupeň právě 5 (dokažte to nalezením rovinného nakreslení G). [3 body]

Ukažte, že takové grafy lze najít libovolně velké (tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje souvislý 5-regulární rovinný graf s alespoň n vrcholy). [2 body]

Úloha 4. Dokažte, že každý rovinný graf G lze rozložit na sjednocení nejvýše pěti lesů (tj. na pět acyklických grafů na $V(G)$ takových, že sjednocení jejich hran je $E(G)$). [4 body]