Úloha 1. Dokažte, že pro $n \geq r \geq 0$ platí:

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}.$$

a) libovolným způsobem, [1 bod]

b) kombinatorickou úvahou. [3 body]

Úloha 2. Dokažte, že $n \geq r \geq 0$ platí:

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n-1}{r} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

a) libovolným způsobem, [3 body]

b) kombinatorickou úvahou. [6 bodů]

Úloha 3. Na stole jsou tři truhličky. V jedné jsou dvě 5koruny, v jedné 5koruna a 10koruna a v jedné dvě 10koruny. Vybereme si náhodnou truhličku a vytáhneme z ní náhodnou minci. Je to 10koruna. Jaká je šance, že i druhá mince v té truhličce je 10koruna? [2 body]

Úloha 4. Mějme uniformě náhodnou posloupnost z $\{0,1\}^n$. Sérií nazveme maximální souvislý úsek stejných hodnot – tedy například posloupnost $(1,0,0,0,1,1,0) \in \{0,1\}^7$ obsahuje 4 série začínající na první, druhé, páté a sedmé pozici. Jaká je střední hodnota počtu sérií? [4 body]