Definice 1. Rovinný graf je který, který lze nakreslit do roviny bez křížení hran.

Definice 2. Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf s daným rovinným nakreslením s množinou stěn F. Jeho *duální (multi)graf* definujeme jako (F, E^*), kde za každou hranu $e \in E$ oddělující stěny $f, f' \in F$ máme hranu e^* mezi f, f'.

Pozn: Duální graf závisí na nakreslení G.

Věta 1 (Kuratowského věta)**.** Graf G je rovinný, právě když neobsahuje dělení K_5 ani $K_{3,3}$.

Věta 2 (Eulerova věta)**.** Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf. Pro každé jeho nakreslení se stěnami F platí

$$|E| = |V| + |F| - 2.$$

Důsledek 1. Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf, $|V| \geq 3$, potom platí

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

To implikuje, že každý rovinný graf obsahuje vrchol stupně nejvýše 5 a je tedy 6-obarvitelný.

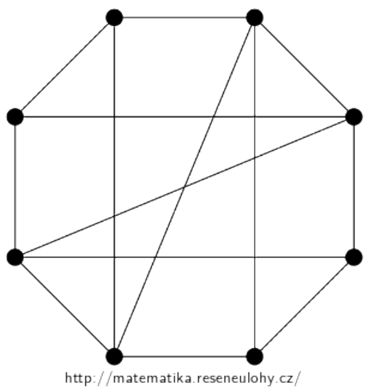
Definice 3. Zobrazení $b : V \to \{1, \ldots, k\}$ nazveme *obarvením* grafu $G = (V, E)$, pokud pro každou hranu $\{u, v\} \in E$ platí $b(u) \neq b(v)$.

Definice 4. Graf G je *k-obarvitelný*, pokud má obarvení pomocí k barev.

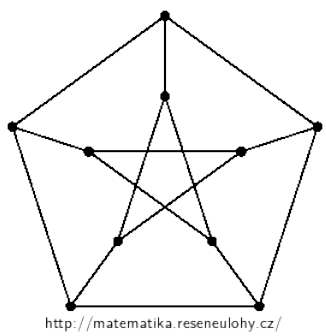
Barevnost $\chi(G)$ grafu G je minimální $k \in \mathbb{N}$ takové, že G lze obarvit k barvami.

Věta 3. Graf je obarvitelný dvěma barvami, právě když neobsahuje lichou kružnici.

Úloha 1. Rohodněte, jestli je graf na obrázku rovinný či nikoli.



Úloha 2. Dokažte, že Petersenův graf není rovinný.



Úloha 3. Najděte charakterizaci souvislých rovinných grafů takových, že duální graf jejich libovolného rovinného nakreslení neobsahuje žádnou smyčku.

Úloha 4. Dokažte, že rovinný graf bez trojúhelníků lze obarvit čtyřmi barvami.

Úloha 5. Ukažte, že má-li rovinný graf sudé stupně, pak je jeho duál obarvitelný dvěma barvami.