

Definice 1. Eulerovský tah v grafu G je tah, který projde všechny hrany G .

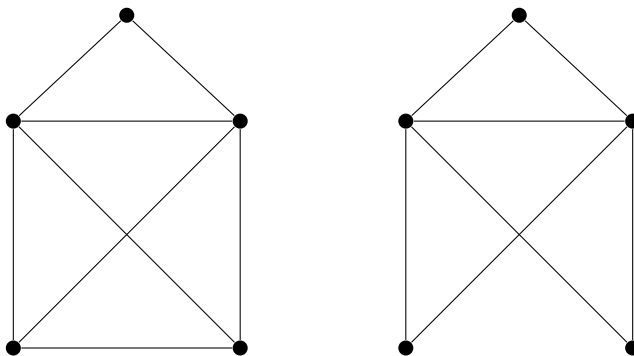
Věta 1. Graf G (bez izolovaných vrcholů) má uzavřený Eulerovský tah, právě když je souvislý a všechny jeho vrcholy mají sudý stupeň.

Definice 2. Strom je souvislý graf bez kružnic.

Věta 2. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) G je strom,
- (ii) mezi každými dvěma vrcholy G existuje právě jedna cesta,
- (iii) G je souvislý, ale po odebrání libovolné hrany přestane být,
- (iv) G neobsahuje kružnice, ale po přidání libovolné hrany kružnice vznikne,
- (v) G je souvislý a splňuje rovnost $|E| = |V| - 1$.

Úloha 1. Rozhodněte, zda jde graf domečku obtáhnout jedním uzavřeným tahem. Pokud ano, najděte takový tah. Co u domečku bez podlahy?



Úloha 2. Otevřený Eulerovský tah je tah, který projde všechny hrany, ale nemusí končit v jiném než počátečním vrcholu. Dokažte, že graf G (bez izolovaných vrcholů) má otevřený Eulerovský tah, právě když je souvislý a právě dva jeho vrcholy mají lichý stupeň.

Úloha 3. Je dán souvislý $2k$ -regulární graf. Dokažte, že jeho hrany lze obravit modře a červeně tak, aby modrý a červený graf byly k -regulární.

Úloha 4. Kolik nejméně a nejvíce listů může obsahovat strom na 10 vrcholech?

Úloha 5. Ukažte, že vrcholy každého stromu s n vrcholy lze uspořádat jako $v_1, \dots, v_n$ tak, že v_i má právě jednoho souseda mezi vrcholy $v_1, \dots, v_{i-1}$.

Úloha 6. Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti alespoň $\lceil n/2 \rceil$.

Úloha 7. Most v grafu G je taková hrana, jejíž odebrání zvýší počet komponent. Ukažte, že každá kostra souvislého grafu obsahuje všechny jeho mosty.