

Úloha 1. Dokažte následující identitu

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$$

kombinatorickou úvahou.

Řešení. Výraz uvnitř sumy na levé straně počítá následující: máme dvě disjunktní skupiny n osob, řekněme A a B , a uvážíme všechny možnosti, jak lze z první z nich vybrat i osob a z druhé vybrat $n - i$ osob. Když sečteme tyto možnosti přes všechny možné hodnoty i , tak přesně počítáme počet způsobů jak z $A \cup B$ vybrat n osob. To platí, jelikož pro každý výběr platí, že část osob bude z A , zbytek z B a každou takovou kombinaci započítáme právě jednou.

To je ovšem to stejné jako kdybychom dali skupiny A a B dohromady a z této skupiny $2n$ osob jich rovnou vybrali n . Počet těchto způsobů přesně vyjadřuje kombinační číslo na pravé straně.

Jelikož obě strany počítají stejné věci, musí si být rovny. $\square$

Úloha 2. Sázková společnost vyrobila 10 000 stíracích losů. Právě jeden z nich vyhrává 100 000 korun, pět vyhrává 50 000 korun a dalších 100 vyhrává 1 000 korun. Pokud jeden los stojí 100 korun, vyplatí se vám los koupit? Jaká je střední hodnota zisku, pokud si koupíme jeden los?

Řešení. Označme X výhru při koupi kuponu, čistý zisk označme $Z = X - 100$. Rozdělení X je následující: 100 000 s pravděpodobností $1/10\,000$, 50 000 s pst $5/10\,000$, 1 000 s pst $100/10\,000$ a 0 se zbývajících pravděpodobností. Tedy

$$\mathbb{E}[X] = \frac{100\,000 + 5 \cdot 50\,000 + 100 \cdot 1\,000}{10\,000} = \frac{450\,000}{10\,000} = 45.$$

Tedy střední hodnota zisku je

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X - 100] = \mathbb{E}[X] - 100 = -55$$

a není výhodné los koupit. $\square$

Úloha 3. Spočítejte střední počet pevných bodů náhodné permutace $[n]$. (Permutaci si můžeme představovat jako bijekci $[n] \rightarrow [n]$. Každá z těchto $n!$ bijekcí má stejnou pravděpodobnost.)

Řešení. Označme X počet pevných bodů náhodné permutace. Jako A_j označme jev „na j -té pozici je pevný bod“, tj. jev „ $\pi(j) = j$ “. Potom máme

$$X = \sum_{j=1}^n I_{A_j},$$

tedy

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[I_{A_j}] = \sum_{j=1}^n P(A_j),$$

kde první rovnost je linearita střední hodnoty a rovnost plyne z toho, že $\mathbb{E}[I_{A_j}]$ je z definice $1 \cdot P(A_j) + 0 \cdot (1 - P(A_j)) = P(A_j)$.

Nahlédneme, že $P(A_j) = 1/n$ pro všechna j a dostáváme, že

$$X = \sum_{j=1}^n P(A_j) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

$\square$