**Úloha 1.** Dokažte následující identitu

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$$

kombinatorickou úvahou.

---

**Definice 1.** Konečný pravděpodobnostní prostor je dvojice $(\Omega, P)$, kde $\Omega$ je konečná množina a $P : 2^\Omega \to [0, 1]$ je funkce taková, že

(i) $P(\Omega) = 1$,

(ii) $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.

Prvkům množiny $\Omega$ říkáme *elementární jevy*, prvkům množiny $\Sigma$ říkáme *jevy* a funkci $P$ říkáme *pravděpodobnost*.

**Definice 2.** Klasický pravděpodobnostní prostor $(\Omega, P)$ je takový pravděpodobnostní prostor, kde platí

$$\forall \omega \in \Omega : P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

**Definice 3** (Podmíněná pravděpodobnost)**.** Pravděpodobnost jevu $A$ za podmínky $B, P(B) > 0$ definujeme

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

**Věta 1** (Věta o úplné pravděpodobnosti)**.** Mějme množiny $B_1, B_2, \ldots, B_n$ po dvou disjunktní, pro které platí $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ (jde o tzv. *disjunktní rozklad* $\Omega$) a navíc $\forall i : P[B_i] > 0$. Potom pro $A \in \Sigma$ platí

$$P[A] = P[A|B_1]P[B_1] + P[A|B_2]P[B_2] + \cdots + P[A|B_n]P[B_n]$$

**Věta 2** (Bayesova věta)**.** Nechť $A \in \Sigma$ a množiny $B_1, \ldots, B_n$ tvoří disjunktní rozklad $\Omega$ a $\forall i : P[B_i] > 0$. Potom platí

$$P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i]P[B_i]}{\sum_j P[A|B_j]P[B_j]}$$

**Definice 4.** Náhodná veličina na konečném pravděpodobnostním prostoru je libovolná funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

**Definice 5.** Nechť $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná veličina na konečném pravděpodobnostním prostoru. Střední hodnotu $X$ definujeme jako

$$\mathbb{E}[X] \coloneqq \sum_{\omega \in \Omega} P[\{\omega\}]X(\omega).$$

**Věta 3** (Linearita střední hodnoty)**.** Nechť jsou $X, Y$ náhodné veličiny, $\alpha \in \mathbb{R}$, platí:

$$\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha\mathbb{E}[X],\ \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

**Definice 6.** Indikátor jevu $A$ je náhodná veličina $I_A : \Omega \to \{0, 1\}$, daná předpisem

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega \in A, \\ 0 & \text{pro } \omega \notin A. \end{cases}$$

Platí $\mathbb{E}[I_A] = P[A]$.

---

**Úloha 2.** Házíme třemi šestistěnnými kostkami.

a) Kolik je v našem pravděpodobnostním prostoru elementárních jevů? Jak bychom je reprezentovali?

b) Jaká je pravděpodobnost, že nám padl součet 16?

c) Jaká je pravděpodobnost, že na kostkách máme:

1) alespoň jednu šestku
2) právě dvě šestky

3) na všech to samé číslo
4) na každých dvou různá čísla

d) Jsou jevy „Na první kostce padlo alespoň $j$“ a „Na první kostce padlo sudé číslo“ nezávislé pro j = 4? Co pro j = 5?

e) Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že nám padla alespoň jedna šestka jestliže součet hozených čísel je 8?

f) Předpokládejme, že házíme $n$ kostkami. Jaká musí být hodnota parametru $n$, aby byl jev „Alespoň na 3 kostkách padne alespoň 4“ pravděpodobnost přesně $\frac{1}{2}$?

**Úloha 3.** Předpokládejme, že neznámou nemocí je trpí 10% populace. Test odhalí nakaženou osobu s pravděpodobností 97% a naopak u zdravého ji vyloučí s pravděpodobností 90%. Když otestujeme náhodnou osobu, jaká je pravděpodobnost, že výsledek bude správný, pokud

a) výsledek vyšel pozitivní,

b) výsledek vyšel negativní.

**Úloha 4.** Sázková společnost vyrobila 10 000 stíracích losů. Právě jeden z nich vyhrává 100 000 korun, pět vyhrává 50 000 korun a dalších 100 vyhrává 1 000 korun. Pokud jeden los stojí 100 korun, vyplatí se vám los koupit? Jaká je střední hodnota zisku, pokud si koupíme jeden los?

**Úloha 5.** Mějme náhodnou posloupnost z $\{0, 1\}^n$. Sérií nazveme maximální souvislý úsek stejných hodnot – tedy například posloupnost $1, 0, 0, 0, 1, 1, 0$ obsahuje 4 série. Jaká je střední hodnota počtu sérií?