Úloha 1. Najděte bijekce mezi následujícími množinami:

a) $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$,

b) $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^2$,

c) $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$.

Úloha 2. Buď R binární relace na množině M. Definujeme mocninu relace R^n takto: $R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$. Dokažte, že pokud je M konečná množina, pak existují $0 < i < j$ takové, že $R^i = R^j$.

Úloha 3. Najděte relaci R na nějaké nekonečné množině takovou, že všechny relace R^n pro $n > 0$ jsou navzájem různé.

Úloha 4. Mějme relaci $\sim$ na $\mathbb{R}^2$ definovanou následovně

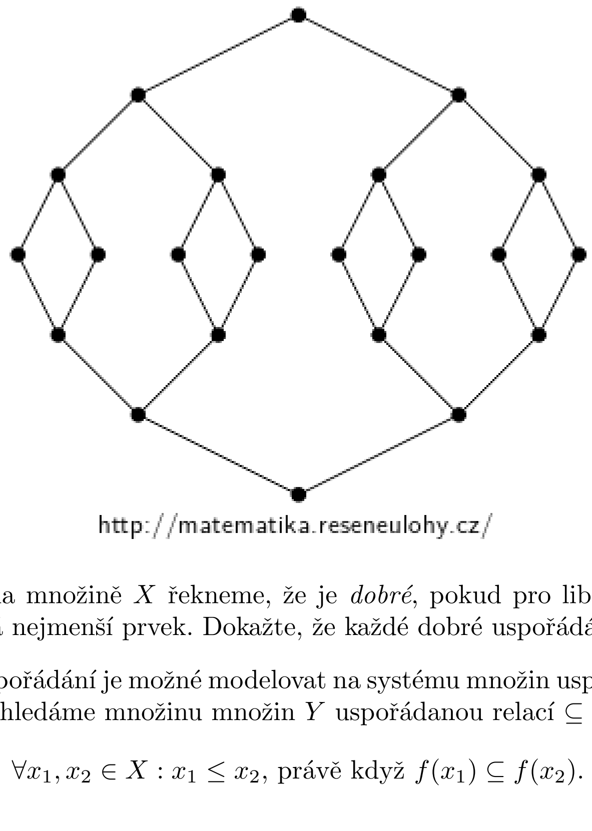
$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff \operatorname{sgn}(x_1) = \operatorname{sgn}(x_2) \wedge \operatorname{sgn}(y_1) = \operatorname{sgn}(y_2),$$

kde funkci $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ definujeme takto:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Rozmyslete si, že $\sim$ je relace ekvivalence, a popište její třídy.

Úloha 5. U uspořádání daného následujícím Hasseho diagramem vyznačte nějaký nejdelší řetězec a antiřetězec. U řetězce i antiřetězce zdůvodněte, proč nelze najít delší.



Úloha 6. O uspořádání $\leq$ na množině X řekneme, že je *dobré*, pokud pro libovolnou podmnožinu $M \subseteq X$ platí, že restrikce $\leq$ na M má nejmenší prvek. Dokažte, že každé dobré uspořádání je lineární.

Úloha 7. Ukažte, že každé uspořádání je možné modelovat na systému množin uspořádaných relací $\subseteq$. Formálně: mějme množinu $(X, \leq)$. K ní hledáme množinu množin Y uspořádanou relací $\subseteq$ a bijekci $f : X \to Y$ splňující

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \leq x_2, \text{ právě když } f(x_1) \subseteq f(x_2).$$