Úloha 1. Dokažte matematickou indukcí, že pro každé $n \geq 1$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} 4i + 5 = 2n^2 + 7n.$$

Úloha 2. Dokažte matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $6n^2 + 2n$ dělitelné čtyřmi.

Úloha 3. Máme šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n, n \in \mathbb{N}$, které chybí jedno políčko. Ukažte, že je možné šachovnici vydláždit dlaždicemi ve tvaru písmene „L“.

Úloha 4. Dokažte, že počet částí roviny při rozdělení n přímkami je nejvýše $1 + \frac{1}{2}(n^2 + n)$.

Úloha 5. Nechť n je přirozené číslo. Dokažte, že pokud je $n^2 - n$ liché, potom je $(n+1)^2 - (n+1)$ liché.

Úloha 6. Je něco špatně na následujícím?
Věta: Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $5^n = 1$.
Důkaz: Pro $n = 0$ tvrzení jistě platí. Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna přirozená čísla $m, 0 \leq m \leq n$ a dokazujeme jej pro $n + 1$. Platí

$$5^{n+1} = \frac{5^n \cdot 5^n}{5^{n-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

Úloha 7. Máme tvrzení $P(n)$ a chceme dokázat jeho platnost pro všechna $n \geq 0$. Jsou následující postupy korektní? Pokud ano, zdůvodněte. Pokud ne, najděte protipříklad.

a) Dokážeme, že $P(n)$ platí pro nekonečně mnoho různých n, a také dokážeme, že pro libovolné n platí $P(n) \Rightarrow P(n-1)$.

b) Dokážeme, že $P(n)$ platí pro nekonečně mnoho různých n, a také dokážeme, že pro libovolné n platí $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

c) Dokážeme $P(0)$, a dále dokážeme, že pro libovolné n platí $P(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \Rightarrow P(n)$.

d) Dokážeme $P(0)$, a dále dokážeme, že pro libovolné n platí $P(\lceil \frac{n}{2} \rceil) \Rightarrow P(n)$.

Úloha 8. Dokažte, že každé přirozené číslo n lze napsat jako součet různých Fibonacciho čísel $F_k, k \geq 1$ takových, že v součtu nejsou žádná dvě po sobě jdoucí Fibonacciho čísla. Dokažte, že tato reprezentace je jednoznačná.

Fibonacciho čísla jsou definovaná následovně: $F_0 = F_1 = 1$ a pro $k \geq 2$ platí $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$.