K organizaci

- Cvičící: Tomáš Hons, `honst@iuuk.mff.cuni.cz`
- Zápočet: během semestru je potřeba získat 100 bodů. V polovině a na konci semestru budou dvě písemné práce na 60 minut, každá za 60 bodů. Vedle toho budou vypsané občasné domácí úkoly, dohromady za alespoň 50 bodů. Pokud na konci semestru bude někomu chybět k zápočtu jenom něco málo bodů, bude možné si je doplnit vyřešením dodatečných úkolů.
- Informace k cvičení lze nalézt na `https://iuuk.mff.cuni.cz/~honst/teaching/dm2425/`
- Pokud byste si s něčím nevěděli rady nebo se chtěli na cokoli zeptat, stačí napsat email a vyřešíme to.

Výroky

Úloha 1. Doplňte následující tabulku pravdivostních hodnot.

a	b	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
1	1					
1	0					
0	1					
0	0					

Úloha 2. Nahlédněte (a zkontrolujte pomocí pravdivostní tabulky), že následující výroky jsou ekvivalentní: (a) $a \Rightarrow b$ (b) $\neg b \Rightarrow \neg a$ (c) $\neg a \vee b$ (d) $\neg(a \wedge \neg b)$.

Úloha 3. Znegujte výroky:

a) Když prší, nevycházím z domu.

b) Nebude-li pršet, nezmoknem.

c) Zmokneme, právě když bude pršet.

Úloha 4. Zapište symbolicky následující výroky, znegujte je a rozhodněte o jejich pravdivosti:

a) Každá žena je vyšší než dva metry.

b) Každé liché číslo, které je beze zbytku dělitelné dvěma, je dělitelné i sedmnácti.

Množiny

Úloha 5. Mějme množiny A, B. Zjistěte, které z následujících podmínek nejsou ekvivalentní podmínce $A \subseteq B$. Pokuste se ji upravit tak, aby ekvivalence platila a to pokud možno co nejmenším zásahem.

a) $A \setminus B = \emptyset$

b) $A \cup B = B$

c) $A \cap B = A$

d) $\overline{A} \setminus B \subseteq \overline{B}$

e) $A \cap \overline{B} = \emptyset$

f) $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

Úloha 6. Mějme množiny A, B, rozhodněte zda platí:

$$A = B, \text{ právě když } \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B),$$

kde $\mathcal{P}(X)$ značí potenční množinu (množinu všech podmnožin) množiny X.

Matematická indukce

Úloha 7. Dokažte matematickou indukcí, že

$$1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = n^2.$$

Uměli byste tento vztah znázornit graficky?

Úloha 8. Dokažte matematickou indukcí, následující vztahy

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}$

b) $\sum_{i=1}^{n} 4i + 5 = 2n^2 + 7n$

c) $\prod_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$

Úloha 9. Dokažte matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $6n^2 + 2n$ dělitelné čtyřmi.

Úloha 10. Dokažte, že počet částí roviny při rozdělení n přímkami je nejvýše $1 + \frac{1}{2}(n^2 + n)$.

Úloha 11. Je něco špatně na následujícím?
Věta: Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $5^n = 1$.
Důkaz: Pro $n = 0$ tvrzení jistě platí. Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna přirozená čísla $m, 0 \leq m \leq n$ a dokazujeme jej pro $n + 1$. Platí

$$5^{n+1} = \frac{5^n \cdot 5^n}{5^{n-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

Úloha 12. Definujme Fibonacciho posloupnost následovně: $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Dokažte následující vlastnosti:

a) $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

b) $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$

c) $F_n \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$