Cílem tohoto úkolu je dokázat následující větu.

Věta. Nechť $G = (V, E)$ je graf a $\mathcal{C}$ jeho prostor cyklů. Následující tvrzení jsou ekivalentní:

(i) G je rovinný,

(ii) existuje báze $\mathcal{B}$ prostoru $\mathcal{C}$ taková, že každá hrana $e \in E$ patří do nejvýše dvou vektorů $\mathcal{B}$.

Důkaz. Nejprve dokážeme implikaci $\Rightarrow$. Mějme nějaké rovinné nakreslení grafu G. Nechť $\mathcal{F}$ je množina všech vnitřních stěn G a definujme $\mathcal{B}_\mathcal{F} = \{C_F : F \in \mathcal{F}\}$, kde C_F je množina hran sousedících *právě jednou* se stěnou F (tj. pokud je stěna F na obou stranách hrany e, pak $e \notin C_F$). Dokažte, že $\mathcal{B}_\mathcal{F}$ je báze splňující (ii).

- Nahlédněte, že každá hrana $e \in E$ patří do nejvýše dvou vektorů $\mathcal{B}_\mathcal{F}$. [1 bod]
- Dokažte, že každý cyklus C grafu G lze vygenerovat množinou $\mathcal{B}_\mathcal{F}$. [3 body]
- Ověřte, že $|\mathcal{B}_\mathcal{F}| = \dim \mathcal{C}$. [2 body]

Opačnou implikace budeme dokazovat obměnou, tj. pokud G není rovinný, potom nemá požadovanou bázi. Nejprve ověříme, že je to pravda pro dva nejdůležitější nerovinné grafy.

- Dokažte, že graf K_5 nesplňuje podmínku (ii). [3 body]

  Hint: Kolik jedniček mohou dohromady obsahovat vektory báze $\mathcal{B}$ splňující podmínku (ii)? Kolik jedniček musí dohromady obsahovat vektory libovolné báze grafu K_5?

- Podobným způsobem dokažte, že graf $K_{3,3}$ nesplňuje podmínku (ii). [1 bod]

Dále použijeme Kuratowského větu, která říká, že pokud G není rovinný, potom obsahuje dělení grafu K_5 nebo $K_{3,3}$ jako podgraf. Všimněme si, že dělení grafu H je podgrafem grafu G, pokud lze H získat z G posloupností následujících operací: odebrání izolovaného vrcholu, odebrání hrany a kontrakce vrcholu stupně 2 (tj. opak podrozdělení hrany).

Dokažte, že pokud dělení grafu H je podrafem grafu G a G má bázi splňující (ii), potom i graf H má bázi splňující (ii).

- Nechť v je izolovaný vrchol G a G má bázi $\mathcal{B}$ splňující (ii). Dokažte, že graf $G - v$ má bázi $\mathcal{B}'$ splňující (ii). [1 bod]
- Nechť e je hrana G a G má bázi $\mathcal{B}$ splňující (ii). Dokažte, že graf $G - e$ má bázi $\mathcal{B}'$ splňující (ii), předpokládáme-li navíc, že
  - hrana e nepatří do žádného vektoru $\mathcal{B}$. [1 bod]
  - hrana e patří do právě jednoho vektoru $\mathcal{B}$. [2 body]
  - hrana e patří do právě dvou vektorů $\mathcal{B}$. [2 body]

  Hint: Nyní ještě nevíme, že pokud má G bázi splňující (ii), tak je rovinný (to teprve dokazujeme). Nicméně pro inspiraci jak z $\mathcal{B}$ vyrobit $\mathcal{B}'$ může být nápomocné podívat se, kdy tyto případy nastanou pro rovinné grafy a co se potom stane s jejich bázemi (viz důkaz implikace $\Rightarrow$).

- Nechť v je vrchol G stupně 2 a G má bázi $\mathcal{B}$ splňující (ii). Dokažte, že graf G/v, tj. G po kontrakci vrcholu v, má bázi $\mathcal{B}'$ splňující (ii). [2 body]

  Hint: Nejprve nahlédněte, že do každého vektoru B patří buď obě hrany sousedící s v nebo ani jedna.

Dostáváme tedy následující: pokud graf G není rovinný, obsahuje dělení K_5, či $K_{3,3}$ (Kuratowského věta). Jelikož tyto grafy nemohou mít bázi splňující podmínku (ii), nemůže ji mít ani graf G. □