Cílem tohoto cvičení je dokázat Brouwerovu větu o pevném bodě pro jednotkový kruh.

Nejprve dokážeme pomocné tvrzení o barvení trojúhelníku. Nechť T je libovolná trinagulace trojúhelníku s rohy a, b, c, tj. všechny vnitřní stěny jsou trojúhelníky. Obarvení $\phi : V(T) \to [3]$ grafu T nazveme *Spernerovské*, pokud splňuje následující:

(i) $\phi(a) = 1, \phi(b) = 2, \phi(c) = 3$,

(ii) na hraně ab trojúhelníku T jsou použity pouze barvy 1 a 2, na hraně ac jen barvy 1 a 3 a na hraně bc jen barvy 2 a 3,

(iii) vnitřní vrcholy jsou obarveny libovolně.

Věta (Spernerovo lemma)**.** Nechť T je Spernerovsky obarvená triangulace troúhelníku. Potom má T vnitřní stěnu, tj. malý trojúhelník v T, jejíž vrcholy mají různou barvu.

Důkaz. Nechť G je podgraf duálního grafu T^* (včetně vnější stěny), kdy zachováme pouze ty duální hrany křížící hrany T, jejichž konce mají právě barvy 1 a 2. Vrcholy G odpovídající vnitřní stěně T nazveme *vnitřní* vrcholy.

Úloha 1. Jaké stupně mají vnitřní vrcholy G?

Úloha 2. Které vnitřní vrcholy G odpovídají hledaným stěnám, jejichž vrcholy mají různé barvy?

Úloha 3. Dokažte, že alespoň jeden takový vrchol v G existuje. Co lze říci o stupni vnějšího vrcholu?

□

Nyní můžeme dokázat Brouwerovu větu pro jednotkový kruh B^2.

Věta (Brouwerova věta pro jednotkový kruh)**.** Libovolná spojitá funkce $f : B^2 \to B^2$ má pevný bod. Tedy existuje bod $x \in B^2$ takový, že $f(x) = x$.

Důkaz. Aby se nám důkaz dobře zapisoval, budeme předpokládat, že f je ve skutečnosti funkce na následujícím trojúhelníku T_0 vnořeném v 3-rozměrném Eukleidovském prostoru

$$T_0 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ \forall i \in [3] : x_i \geq 0\}.$$

Toto zjedodušení si můžeme dovolit, neboť množiny S^2 a T_0 jsou homeomorfní, tj. existuje bijekce $h : S^2 \to T_0$, která je spojitá na obě strany. Pro spor předpokládejme, že $f : T_0 \to T_0$ nemá žádný pevný bod.

Uvažme posloupnost stále jemnějších triangulací trojúhelníku T_0, kterou označíme $T_1, T_2, \ldots$. Každá T_{j+1} je triangulací T_j, přičemž navíc požadujeme, aby délka hran v T_j konvergovala k 0 pro $j \to \infty$.

Dále zadefinujeme obarvení triangulace T_j. Vrcholu $x \in V(T_j)$ přiřadíme barvu $\phi(x)$ pro kterou platí $\big(f(x)\big)_{\phi(x)} < x_{\phi(x)}$. Taková barva existuje, protože $\sum_i x_i = \sum_i \big(f(x)\big)_i = 1$ a protože předpokládáme, že nemáme pevný bod. Pokud lze zvolit více souřadnic jako $\phi(x)$, volme tu nejmenší.

Úloha 4. Ověřte, že obarvení ϕ triangulace T_j je Spernerovské.

Podle Spernerova lemmatu existuje stěna s vrcholy $x^{(j,1)}, x^{(j,2)}, x^{(j,3)}$ s barvami $1, 2$ a 3, tj. pro každé $i \in [3]$ máme $\big(f(x^{(j,i)})\big)_i < x_i^{(j,i)}$. Takové vrcholy existují pro každé j, uvažme tedy posloupnost vrcholů $\{x^{(j,1)} : j \in \mathbb{N}\}$. Jde o posloupnost vrcholů v kompaktní (uzavřené a omezené) množině T_0, má tedy konvergentní posloupnostnost. Pro jednoduchost značení předpokládejme, že sama posloupnost $\{x^{(j,1)}\}$ je konvergentní a má tedy nějakou limitu $x^* = \lim_{j\to\infty} x^{(j,1)}$.

Úloha 5. Dokažte, je bod x^* je zároveň limitním bodem posloupností $\{x^{(j,2)}\}$ a $\{x^{(j,3)}\}$. Využijte, že délky hran podrozdělení T_j konvergují k 0.

Úloha 6. Ukažte, že potom pro každé $i \in [3]$ platí $\big(f(x^*)\big)_i \leq x_i^*$.

Úloha 7. Zformulujte závěrečný spor s předpokladem, že f nemá pevný bod.

□