Úloha 1. Mějme relaci $\sim$ na $\mathbb{R}^2$ definovanou následovně

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff \operatorname{sgn}(x_1) = \operatorname{sgn}(x_2) \;\&\; \operatorname{sgn}(y_1) = \operatorname{sgn}(y_2),$$

kde funkci $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ definujeme takto:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Dokažte, že $\sim$ je relace ekvivalence a nakreslete její třídy ($\mathbb{R}^2$ odpovídá rovině). [1 bod]

Úloha 2. Buď R relace na množině M. Definujeme mocninu relace R^n takto: $R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$. Dokažte, že pokud je M konečná množina, pak existuje $0 < i < j$ takové, že $R^i = R^j$. [3 body]

Úloha 3. Najděte relaci R na nějaké nekonečné množině takovou, že všechny relace R^n pro $n > 0$ jsou navzájem různé. [3 body]

Úloha 4. Nechť R a S jsou libovolné ekvivalence na množině M. Rozhodněte a zdůvodněte, které z následujících relací jsou nutně také ekvivalencemi.

a) $R \cap S$ [1 bod]

b) $R \cup S$ [1 bod]

c) $R \Delta S$, to jest $(R \setminus S) \cup (S \setminus R)$ [1 bod]

d) $R \circ S$ [1 bod]

Pro každou možnost odpovězte a zdůvodněte jednu z následujících možností: vždy (pro každou volbu R a S), někdy (pro aspoň jednu volbu), nebo nikdy (pro žádné R a S).