Úloha 1. Dokažte matematickou indukcí, že

$$1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = n^2.$$

Uměli byste tento vztah znázornit graficky?

Úloha 2. Dokažte matematickou indukcí, následující vztahy

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}$

b) $\sum_{i=1}^{n} 4i + 5 = 2n^2 + 7n$

c) $\prod_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$

Úloha 3. Dokažte matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $6n^2 + 2n$ dělitelné čtyřmi.

Úloha 4. Máme šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n, n \in \mathbb{N}$, které chybí jedno políčko. Ukažte, že je možné šachovnici vydláždit dlaždicemi ve tvaru písmene „L“.

Úloha 5. Dokažte, že počet částí roviny při rozdělení n přímkami je nejvýše $1 + \frac{1}{2}(n^2 + n)$.

Úloha 6. Definujme Fibonacciho posloupnost následovně: $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Dokažte následující vlastnosti:

a) $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

b) $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$

c) $F_n \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

Úloha 7 (*). Definujme n-té harmonické číslo H_n následovně:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Dokažte následující identity:

a) $\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$

b) $\sum_{i=1}^{n} H_k^2 = (n+1)H_n^2 - (2n+1)H_n + 2n$